MISCELLANEA
PHILOSOPHICO-MATHEMATICA.

Favete, adeste aequò animo, & rem cognoscite
Ut pernoscatis, ecquid spei sit reliquum.

Terent. Prolog. Andr.

MISCELLANEA
PHILOSOPHICO -- MATHEMATICA
SOCIETATIS PRIVATAE
TAURINENSIS

TOMUS PRIMUS.



AUGUSTÆ TAURINORUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.
MDCCLIX.



A SON ALTESSE ROYALE

MONSEIGNEUR LE DUC DE SAVOYE.

MONSEIGNEUR

L'Ouvrage que nous avons l'honneur de vous présenter est le prémier fruit des tra-

vaux que nous avons commencé ſous vos Auſpices, & la protection que V. A. R. veut bien lui accorder, d'autant plus flatteuſe pour nous qu'elle eſt éclairée, préviendra le Public en ſa faveur. La ſupériorité des connoiſſances qui vous diſtinguent dans le rang élevé où vous êtes placé, vous fait appercevoir ces liaiſons ſecrettes, & ces rapports qui échappent au commun des hommes, par leſquels les ſciences les plus abſtraites conduiſent ſouvent aux plus utiles découvertes pour la Societé; c'eſt de ce point de vuë que vous vous intéreſſés à l'avancement des ſciences, & qu'en daignant jetter un oeil favorable ſur ceux qui les cultivent, vous nous retracés les grandes qualités qui brillent dans NOTRE AUGUSTE SOUVERAIN.

Puiſſe, MONSEIGNEUR, ce premier eſſai répondre à ſon objet, & être en quelque façon digne de vous : ou puiſſe du moins nôtre exemple inſpirer à des talens ſupérieurs le déſir, & le courage d'y ſatisfaire plus amplement. Pour nous, il nous ſera toujours aſſés glorieux de pouvoir vous offrir nos reſpectueux hommages.

De V. A. R.

MONSEIGNEUR

Les très-humbles, & très-obéiſſans Serviteurs
Saluce, De La Grange, Cigna.

Imprimatur. Provic. S. Officii Taurini.

V. Berta LL. AA. P.

Se ne permette la Stampa

NICCOLO' DI QUAREGNA per la Gran Cancellaría.

DE IIS, QUAE IN SOCIETATE
ACTA SUNT

COMMENTARII

A JOH. FRAN. CIGNA

CONSCRIPTI.

Miscell. Taur. Tom. I.

DE BELLINIANO PROBLEMATE, SEU DE OVORUM ELIXATORUM CICATRICULA.

CUM ova lampadis calore foveremus, parata machina ad imitationem illius, quae in Berolinenſis Academiae monumentis deſcribitur (*a*), praecipuos Auctores conſulebamus, qui de ovo, aut formatione pulli commentati fuerant, ut eorumdem lectione ſtudia noſtra dirigi poſſent, & adjuvari. Inter hos Bellinum quoque adivimus, penes quem cum praeclara multa, & laude digna reperiremus, tum illud in primis admirabile nobis videbatur, quod nomine belliniani problematis ſolemne eſt: cicatriculam, dum ova elixantur, e ſuperficie vitelli in centrum abire, idque

(*a*) An. 1749.

eo magis admirationem noſtram excitabat, quod in incubatis ovis rem aliter ſe habere, & cicatriculam poſt elixationem remanere in ſuperficie Bellinus ipſe traderet : tenebamur itaque deſiderio , ut rem miram noſtris oculis intueremur, cui ut ſatisfieret, ab incubatis ovis exordium duximus. Horum unum elixatum cortice, & albumine nudavimus, & cicatriculam cum contento pullo ad vitelli ſuperficiem revera invenimus paullo infra obtuſum ovi verticem medio, ut ſolet, inter *calazas* loco, & tenuiſſimae albuminis parti ſubjectam eſſe obſervavimus, quae omnia diligentius a nobis adnotata ſunt , ut eo facilius in poſterum, ſi quando opus eſſet, cicatriculam reperiremus. Obſervata cicatricula vitellum per centrum ſecuimus, & in centro ipſo praeter omnem expectationem corpus invenimus albidum, tenerum, quale nempe nomine cicatriculae ad centrum latae in ovis non incubatis, & elixatis Bellinus deſcripſerat : & hujus quidem corporis cum belliniana cicatricula omnimodam ſimilitudinem declaravit comparatio, quae cum cicatricula ad centrum recentis ovi elixati inventa inſtituta fuit : quae cum omnium, ut inquiebam, expectationem fefelliſſent, in cauſſa fuerunt, cur noſtrum aliquis hujuſmodi dubitationes proponeret. An non cauſſa, quae in ovis non incubatis, dum elixantur, cicatriculam ad centrum pellit, id multo magis in incubatis efficere deberet, in quibus incubationis calore cicatriculae nexus reſolvuntur, atque laxantur ? An non fieri potuit, ut in ovis non incubatis cicatricula ad vitelli ſuperficiem poſita ob parvitatem Bellini diligentiam effugerit, qui dum ubique eandem ſollicite perquireret, in corpus album inciderit in centro vitelli poſitum, idque corpus ſimilitudine aliqua deceptus pro cicatricula habuerit? Enim vero ſi vera eſſet cicatricula in incubatis ovis , quorum cicatricula in ſuperficie remanet, ad centrum neutiquam reperiretur. Quamquam porro hiſce conjectationibus aliquam veri ſpe-

ciem

ciem inesse omnes faterentur ; ne tamen iisdem leviter adeo indulgeremus, Bellini fides, & auctoritas illustrium Scriptorum testimonio confirmata, & ingenuus veritatis amor prohibebant. Statuimus itaque in non incubatis, elixatisque ovis vitelli superficiem omni diligentia perlustrare, ut experiremur, num forte hac in re Bellino feliciores esse possemus, secus arduam inquisitionem dimitteremus potius, quam ut magni Viri diligentiae, aut candori temere quidpiam detraheremus. Suscepta igitur inquisitio est in primis ab Equite Salutio, qui non leve industriae, ac dexteritatis suae hac in re specimen exhibuit ; ostendit enim in plerisque recentibus ovis, quae elixari, ac indurari omnino curaverat cicatriculam ad vitelli superficiem adhuc haerentem, quam cicatriculam esse, tum ex situ demonstrabat, qui medius erat inter *calazas* paullo sub obtuso ovi vertice, & tenuissimae albuminis parti respondebat, ut in incubatis ovis contigisse diximus, tum ex figura, quae annulis conflata erat, & cicatriculam recentium ovorum non elixatorum plane aemulabatur, tum demum ex aliquali ejusdem prominentia supra vitelli superficiem, quam respondens indurati albuminis foveola recipiebat ; adeo ut integro adhuc albumine exteriora ovi perlustrans cicatriculae locum certissime indicaret. Ad centrum porro albidum Bellini corpus perpetuo inveniebat, dummodo nec nimis parum, nec diu nimis excocta ova fuissent, quibus in casibus vel nullum, vel obscurius id corpus conspiciebatur. Haec cum saepissime omnium oculis Vir diligentissimus exhibuisset paullo liberius de belliniani inventi veritate dubitare caepimus, Auctoresque perquirere, si qui forte experimenta haec iterassent, aut illustrassent, ut ex illorum observationibus nostrae confirmari, vel refelli possent. Occurrebat itaque Cl. Balbi dissertatio bononiensibus commentariis inserta (*b*), in qua cum Bel-

A 2 lini

(*b*) Tom. 2. par. 2. pag. 369. & seq.

lini experimenta renovaſſet problematis ſolutionem ex mechanicis principiis deducere conatus eſt. In illis autem experimentis obſervavit, poſtquam ova ſex horae minuta in ebulliente aqua detenta ſunt, cicatriculam adhuc ſuo manere loco, quamquam altius eo tempore vitellus obduruerit. Inde vero novum dubitationi noſtrae fundamentum acceſſit; neque enim ullo modo concipere poteramus, quo pacto cicatricula per obduratum vitelli ſtratum permeare potuiſſet in tanta teneritudine, & integra deinceps ad centrum pervenire. Poſtquam novem horae minuta ova in ebulliente aqua Balbi detinuiſſet, cicatriculam in centro vitelli ſe reperiiſſe refert evidentiſſimam; ſub-albidum ſcilicet corpus a Bellino habitum pro cicatricula; eo autem in loco de vitelli ſuperficie non meminit Cl. Auctor, ut videatur Bellini fidei innixus corpus illud albidum, quod in centro repererat, pro cicatricula habuiſſe, omnemque adeo cicatriculam in vitelli ſuperficie inveniendi curam abjeciſſe, utpote quam inutilem fore praevideret. Nos contra, quibus Bellini obſervationes jam ſuſpectae erant, in ovis iis, quae decem, & ultra minuta in ebulliente aqua elixata fuerant reperta cicatricula ad vitelli ſuperficiem poſita, hanc comparabamus cum illa, quam in ovis, quae quinque tantum minuta elixata fuerant, Balbi deprehenderat, cumque omnino ſimilem eſſe cerneremus, jam nulla ſupererat dubitatio, cicatriculam poſt quodcumque ebullitionis tempus nunquam a vitelli ſuperficie recedere. Ad albidum corpus quod ſpectat in centro vitelli poſitum, tum in ovis non incubatis, quod Balbi obſervaverat, tum in incubatis, quod noſtrae obſervationes nos docuerunt, non reperiri, aut obſcurius cerni certum eſt, quando vel diutius, quam par eſſet, vel per brevius tempus in ebulliente aqua ova detenta fuerunt.

Ne autem in tanta clariſſimorum Virorum aliter ſentientium auctoritate noſtrae obſervationes ſua veritate, & fide deſti-

destituerentur Cl. Bertrandi Regium Chirurgum, Regiumque Professorem, ac Parisiens. Chirurg. Acad. Socium earundem participem esse voluimus, qui postquam ipsas pluries omni diligentia renovasset, ambiguas neutiquam esse conclusit. Gavisi itaque non mediocriter fuimus qualiacumque haec tentamina omni difficultate physicos expedire.

DE VARIA BAROMETRORUM DIVERSAE DIAMETRI ALTITUDINE.

I. CUM Bononiensis Academiae commentarios pervolverem, atque ex praeclaris inventis, quibus elegantissima volumina referta sunt, plurimum jucunditatis, utilitatisque perciperem, in eum locum incidi, ubi Clar. Balbi experimenta narrantur, quae ad variam barometrorum diversae diametri altitudinem spectant, eamque Claris. Auctoris sententiam esse intellexi, ut censeat capillarium tuborum exemplo, minorem angustiorum barometrorum altitudinem a majori tuborum, quibus construuntur vi repellente esse repetendam (*a*), ita tamen, ut repellens ea vis in superiori vacua barometrorum parte in primis sedem habeat (*b*), & (quemadmodum experiundo invenit) frigore ad eam partem admoto imminui possit, restituto calore iterum adaugeri (*c*). Cum vero haec semel, iterumque attente perlegissem, quemadmodum Claris. Viri industriam, & experiundi peritiam magnopere admirabar, ita de phaenomeni caussa penitus consentire non poteram.

2. Primo enim animadvertebam vim repulsivam tuborum capillarium, si quae sit, eam in vacua parte minime positam

(*a*) Com. t. 2. par. 1. a pag. 307. ad 311., & a pag. 353. ad 350.
(*b*) Ibid. p. 354. & seq.
(*c*) Ibid. p. 356.

ſitam eſſe, cum diametro tantummodo reſpondeat, nec varia vacuae partis longitudine mutetur (*d*), nec proinde barometrorum vim repellentem in vacua parte eſſe reponendam. Deinde vero ſi vel maxime in vacua barometrorum parte vis repellens locata eſſet, eam frigore augeri potius, quam minui debuiſſe, quandoquidem, ut ipſe Balbi advertit, frigoris vi tubi conſtriguntur (*e*), eoque magis, quod in tubis capillaribus nulla hujuſmodi proprietas nec a Balbi, nec ab aliis fuiſſet obſervata.

3. Conjecturam itaque feci mercurii depreſſionem in anguſtioribus barometris deberi potius preſſioni relicti in vacua parte aëris, qui vel majori copia in anguſtioribus tubis adeſſet, vel arctius ſpatium nactus, proindeque denſior ſubjectum mercurium vehementius comprimeret, admoto autem ad ſupremam barometri partem frigore ita conſtringeretur, ut minorem preſſionem exerceret. Enim vero dum perpendebam, quam difficile ſit omnem e barometris aërem penitus expellere, dum difficultatem in anguſtioribus tubis majorem eſſe cogitabam, dum Muſchembroekii diligentiam in omni expellendo aëre Balbi ſupervacaneam exiſtimaſſe legebam (*f*), non parum in mea ſuſpicione confirmabar.

4. Eo itaque adductus ſum, ut meam hanc qualemcumque ſuſpicionem cum Sociis communicarem, quos inter Ludovicus de la Grange eamdem non modo non improbavit, verum etiam experimentum indicavit, quo definiri facile poſſet: propoſuit nempe, ut accuratiſſima barometra conficerentur ex tubis diverſae diametri, qui in infima parte flexi ſurſum crus promitterent barometrico tubo aequale, &

(*d*) Inſtitut. Neuton. de M. Sigorgne §. 364. 375.

(*e*) L. c. p. 356.

(*f*) L. c. p. 357. cum ſimilia experimenta Florentini propoſuiſſent ex hac ipſa cauſſa pendere Muſchembroechius definivit cum in accuratiſſimis barometris calore, aut frigore ad ſupremam partem admoto mercurii altitudinem non mutari obſervaverit. Vide additamenta ejuſdem ad Acad. Flor. in Collection Académique partie étrang. Tom. 1. p. 26.

& parallelum, ut in ipſum mercurius infundi poſſet, ſicque aër, ſi quis eſſet, in vacua barometri parte in brevius ſpatium coërceri. Si enim, inquiebat, addito per vices mercurio, ipſius altitudo ſupra libellam minueretur, & decrementa altitudinis relicti post ſingulas additiones in ſuprema barometri parte vacui ſpatii inverſam rationem ſequerentur, inde confici poſſe depreſſionem barometri tribuendam eſſe fluido elaſtico in ſuperiori barometri parte contento, cujus elaſticitas in ratione inverſa voluminis adaugeretur, qualem aëris proprietatem eſſe ad certos uſque limites Phyſici noverunt (*g*).

5. Experimentum igitur caepimus, omnique diligentia ſaepe iteravimus, cum barometrorum alterum vix dimidiam lineam in diametro haberet, alterum paullo minus quam duas, & mercurius quidem in anguſtiori tubo quatuor circiter lineas inferius haeſit, quam in ampliore, infuſoque, ut propoſitum erat, in crus alterum mercurio altitudo barometri ſupra libellam imminuta eſt, ita ut decrementa altitudinis relicti in ſuprema parte vacui ſpatii inverſam rationem quam proxime ſervarent, quamquam in horizontali ſitu collocato barometro exigua tantum in ſuprema parte aëris bulla deprehenderetur, quae vix aciculae caput magnitudine aequaret. Verbo dicam, talem fuiſſe hujus experimenti exitum, ut Cl. Auctor jam exploratum narraſſe, potiuſquam novum propoſuiſſe videretur. Jam vero ſi a vacua barometri parte mercurius repelleretur imminuta vacuae partis longitudine ſimul & repulſio minui debuiſſet, ut Bononienſes Academici alicubi fatentur (*h*): at contra, ut dictum eſt, mercurii depreſſio major evadebat.

 6. Quam-

(*g*) Cogitavi deinceps experimentum faciliori opera abſolvi poſſe etiam barometris qualia a Phyſicis parari ſolent, dummodo magis, minuſve iiſdem inclinatis, & magis, minuſve ea ratione condenſato, ſi quis eſſet, in vacua parte aëre normalis mercurii altitudo ſupra libellam metiretur, & varia ipſius decrementa, aut incrementa notarentur.

(*h*) P. 355.

6. Quamquam porro eo in experimento expectationi eventus adamussim respondisset, nondum tamen eidem acquievi, quin imo veritus sum, ne minori diligentia nostra barometra constructa fuissent, atque adeo residui aëris pressio simul cum vi vitri repellente conjungeretur, cum in iis, quae accuratiora Balbi parasset, sola vis repellens omnem depressionem effecisset. Alio itaque experimento directe investigare constitui, quantum tuborum vis repellens, si quae esset, in deprimendo mercurio valeret.

Itaque animadvertebam vim repellentem ab aëre non oriri, nec ab aëris actione ullo modo mutari (*i*) oportere, adeo ut, si quae differentia esset vis repulsivae inter binos tubos barometricos, eadem etiam in iis apertis se proderet. Binos igitur tubos, quorum unus duas lineas patebat in diametro, alter vix unam, ita inferiori extremitate jungendos curavi, ut deinceps flexi sursum normaliter erigerentur, juncturae autem locus esset in media inferiori parte. Tuborum parietes eamdem propemodum crassitudinem habebant, eodem vitro conflati fuerant, altitudo erat eadem, quanta barometrorum esse solet, erat autem uterque apertus in superiori extremitate. Hos mercurio implevi ad eam altitudinem, ad quam mercurius in barometro suspenditur, ut differentia altitudinis mercurii in binis tubis differentiam vis repulsivae in barometris ejusdem diametri ostenderet: veruntamen mercurius ad libellam propemodum compositus est, ut vix tertia, quartave lineae parte in angustiori tubo depressior deprehenderetur. Dum vero hoc experimentum cum iis comparabam, quae Cl. Galeatius instituit, in quibus nempe inter barometra ejusdem diametri differentiam altitudinum trium linearum fuisse observavit (k), verosimillimum videbatur depressionem eam barometrorum a Balbi observatam vel plane totam,

(*i*) Sigorgne l. c. §. 329.
(*K*) P. 309. 310.

totam, vel ſaltem maxima ex parte alii cauſſae, quam vi tuborum repellenti eſſe adſcribendam.

7. Dum haec tentarentur, Eques Salutius novam indicavit experimenti ſpeciem, quae rem totam mirifice illuſtrare non tantum poſſet, verum etiam ſola quaeſtioni abſolvendae ſufficeret: propoſuit nempe, ut communicantes barometrici tubi, quibus in ſuperiori experimento uſus fueram (6) mercurio implerentur, tum in vas mercurium continens inverterentur; ſic enim bina barometra inaequalis diametri eſſe proditura, quae cum commune in ſuprema parte vacuum ſpatium haberent, aequalem etiam a reſiduo, ſi quis forte remaneret, in ea parte aëre preſſionem paterentur, atque adeo ſolum effectum vis repulſivae ſuarum altitudinum differentia certiſſime definirent.

Eos igitur tubos iterum replevimus, & candentium prunarum calori expoſuimus, ut mercurius ebulliret, ſicque prodeuntes ab ipſo aëreae bullae per immiſſum, blandeque commotum filum ferreum educerentur: his peractis, inverſiſque tubis eamdem fere ac in ſuperiori experimento altitudinum differentiam invenimus, quae ſcilicet tertiam, quartamve lineae partem aequaret.

8. Quidquid igitur de priori experimento ſentiendum ſit (6), poſtremo (7) difficultatem omnem tolli, & noſtram ſententiam luculentiſſime confirmari cenſemus. Erant enim bina barometra, quae in reliquis cum Academicorum Bononienſium barometris omnino convenirent, atque adeo vis repulſivae effectum non minus, quam illa oſtendere deberent: quapropter cum Bononienſes Academici multo majorem altitudinum differentiam obtinuerint, concludendum omnino eſt, copioſiori aëri in minori barometro relicto eamdem eſſe adſcribendam, quum commune in noſtris barometris vacuum ſpatium nullam hujuſmodi differentiam admitteret. Voluimus etiam experiri, num ex admota glacie ad ſupremam partem altitudo mercurii adaugeretur, &

magis quidem in angustiori barometro, num contra ex admoto calore minueretur, & magis quidem in minori, id enim ex Balbi theoria sequebatur, cum nostra contrarium suaderet; altitudinum namque incrementa, & decrementa in utroque tubo aequalia futura erant, siquidem ex condensatione, & rarefactione relicti in vacua parte communis aëris penderent, cum inaequalia esse deberent, si ab aucta, vel minuta tuborum vi repellente orirentur. Sed frustanea fuit in hanc rem adhibita opera; neque enim vel ex admotis calidis linteis, vel ex admota glacie mercurii altitudo in tubis mutata est; deinceps vero cum aëris aliquae bullae in eam vacuam partem consulto admissae fuissent, tunc equidem glaciei frigore mercurium elevari, ex linteorum calore iterum deprimi observavimus, ut tamen altitudinum incrementa, & decrementa in utroque tubo ad amussim aequarentur: ex quo fit manifestum mercurii altitudinem ex frigore, vel calore non mutari, siquidem superior barometri pars aëre accuratissime vacua sit, quod vero incrementum, vel decrementum ex calore, & frigore observatur, id relicto in ea parte aëri tribuendum esse, qui aequalia incrementa, & decrementa efficiat, si communis, & aeque densus in utroque barometro sit, quemadmodum in nostro experimento contingit, inaequalia vero, si inaequali copia, & impari densitate relinquatur, quemadmodum in Bononiensium barometris accidisse ex hactenus dictis colligi posse censemus.

9. Eosdem tubos iterum mercurio purissimo implevimus, & pari industria aëre expurgavimus, eamdemque altitudinum differentiam obtinuimus. Iterum pariter glacie per immissum nitri spiritum admodum refrigerata, & candentibus bracteis ferreis supremam partem refrigerare, & calefacere per vices curavimus; at non minus frustranea opera nostra fuit, cum aeque immobilis, ac in priori tentamine mercurius perstitisset.

10. Eos-

10. Eosdem etiam tubos ex utraque parte apertos in vas mercurio plenum injecimus, ut depressionum differentiam reperiremus, eamque iterum tertiam, quartamve lineae partem non excedere observavimus, in qua constanti experimentorum consensione (6. 7. 9.) veritatis non leve argumentum inesse consideranti patebit.

11. Aliqua quidem nascebatur difficultas ex iis experimentis, quae in vacuo boyleano a Viris Cl. capta sunt: in quibus nempe educto aëre, & mercurio in utroque barometro descendente, auctaque adeo vacuae partis capacitate, differentia tamen altitudinum eadem perseverabat, id enim Cl. de la Grange experimento in primis adversabatur. Etenim si in eo experimento imminuta vacuae partis capacitate differentia altitudinum augebatur, aucta in hoc experimento eadem capacitate differentia imminui similiter debuisset. Legebamus quidem Plantadium observasse in montibus ultra centum hexapedas altis omnem differentiam sublatam fuisse, quod cum Bononiensium experimentis opponeretur nostrae theoriae, & experimentis apprime erat consentaneum: quamquam enim ipsi proponant in Plantadii observatione vi frigoris in montibus eam differentiam sublatam fuisse, cum tamen, ut demonstravimus, frigus differentiam non minuat, nisi relicti aëris elasticitatem minuendo minime dubium videtur, id etiam magna ex parte ex descensu mercurii, & ejusdem aëris rarefactione contigisse, ex qua non minus quam ex frigore ejusdem elasticitas minor evadit.

12. Ea igitur experimenta repetenda suscepimus, ut si fieri posset, diversitatis caussam assequeremur: & revera maximam in iisdem varietatem invenimus. Quando enim barometris utebamur, quae supra candentes prunas aëre expurgata non fuerant, inter exanthlandum altius barometrum depressiori aequale evadebat, & cessante emboli motu pristina differentia redibat, quemadmodum Bononienses observarunt; alias, quando accuratissime supra candentes

prunas

prunas barometrorum mercurius aëre fuerat repurgatus, durante emboli motu amplius barometrum deprimebatur, & in eadem depressione etiam cessante emboli motu permanebat, quod cum Plantadii experimento in primis convenire videtur. Arbitrabamur itaque in priori casu, cessante emboli motu, novum aërem, & quidem copiosius in angustiori barometro ex parietibus labente mercurio detectis, vel ex mercurio ipso prodiisse, eumque aërem pristinam differentiam restituisse, quod in barometris aëre expurgatis similiter contingere non potuerit.

13. Revera hasce descensuum anomalias aëri in suprema barometrorum parte contento, vel deinceps a mercurio, aut vitro erumpenti tribuendas esse demonstrat experimentum barometris communicantibus in machina pneumatica institutum; ea quippe barometra, quae eandem propemodum, ut dictum est (7), altitudinem habebant, dum aër educeretur, aequali omnino celeritate descendebant, & eamdem altitudinis aequalitatem servabant etiam quiescente embolo, & similiter aëre in recipiens pneumaticum pedetentim admisso pari gradu ascendebant, ut aeque alta perpetuo remanerent.

14. Superest, ut moneam Muschembroeckium, Desagulierium, Sigornium, aliosque primae notae Physicos ostendisse, mercurium a vitro non solum non repelli, quin potius ab eodem attrahi; depressionem autem mercurii in capillaribus tubis fieri docuisse excessu vis attrahentis partium mercurii inter se supra vim attrahentem vitri (*l*); quapropter cum ea attractionis differentia locum non habeat,

(*l*) Mercurium absque vi repellente deprimi posse cognovi, dum ipsum inter aeneam bracteam ad acutissimum angulum flexam ita in curvam sinuari observavi, ut maxime depressus prope angulum esset, & eo elatior, quo magis bracteae crura divergerent, non secus ac inter vitreas laminas contingat. Mercurium autem ab aëre repelli nemo dixerit, cum in eo ipso experimento aeneae laminae margo in mercurium immersus eodem imbutus, infectusque sit & mercurius a Chymicis cum aere in amalgama uniatur &c.

beat, si barometrum ex unico inflexo tubo construatur, absque eo quod in subjectum vas mercurio plenum immergatur, patet modus, quo in angustissimis etiam barometris mercurii depressio ab ea caussa orta declinari possit. Hoc autem artificium etiam in hypothesi vis repellentis ipsius effectus praecavebit; cum enim vis repellens perinde ac vis attrahens, si quae sit in tubis, eadem remaneat quaecumque sit ipsorum longitudo, & quantacumque ipsorum pars in attractum, aut repulsum fluidum immergatur (*m*), manifestum fit repulsionem mercurii in barometro haerentis a repulsione ejusdem in altero crure elidi, ac corrigi debere.

DE CORRIGENDIS BAROMETRORUM ERRORIBUS EX CALORE, ET FRIGORE NATIS.

I. BArometrorum mutationes non solum ex variata atmospherae pressione ortum ducere, verum etiam ex vario caloris gradu, qui mercurii densitatem immutet a longo jam tempore Physicis innotuit, factumque propterea est, ut effectibus caloris a gravitatis effectibus distinguendis ab eo tempore incubuerint: veruntamen correctiones hujusmodi proposuerunt, quae pro unaquaque barometri observatione experimenta requirerent, aut computationes, quorum alterum difficile erat, alterum incommodum. Laudabile proinde visum est Ludolff consilium, qui in monumentis Acad. Sc. Berol. (*a*) talem correctionem proposuit, ut absque experimentis, & absque computis ex solius scalae barometricae observatione vera atmospherae pressio quocunque tempore cognosceretur. Id duntaxat

(*m*) Quae de attractione Sigornius demonstrat § 330. 375. ad vim repulsivam transferri facile possunt, cum eae vires non nisi ob contrariam directionem inter se differant.

(*a*) An. 1749.

duntaxat in ea correctione incommodi supererat, ut scalae constructio, quam Vir Cl. exhibuit non admodum facilis, & expedita videretur, & thermometri comparationem perpetuo postularet. Cum itaque de eo etiam incommodo tollendo cogitarem, Cl. de la Grange ea de re collocutus sum, qui unica observatione problema hoc ita absoluit, ut nihil in hac re desiderari amplius posse videatur. Inquiebat enim incrementum altitudinis mercurii ex dato caloris gradu natum esse, ut altitudinem columnae mercurii, quae ei calori exponeretur, ac proinde si barometra ex unico inflexo tubo conficerentur, ita ut in crure altero mercurii altitudo unius tantum, aut duorum pollicum esset, rarefactionem mercurii, & condensationem in eo crure tam exiguam altitudinis differentiam esse effecturam, ut negligi tuto posset; nil igitur aliud esse faciendum, nisi ut scala altitudinum breviori barometri cruri apponeretur; sic enim ascensus, ac descensus, ex mutata aëris gravitate natos aequae percipi, interea dum mutationes ex calore productae sensibilem errorem non parerent.

2. Cum porro quantum mercurius in uno crure adscendit, tantundem in altero descendat, & contra, variatio altitudinis mercurii supra libellam dupla est spatio a mercurio descendendo, vel adscendendo percurso: quapropter ut scala veram altitudinem supra libellam significet in hac loco pollicum semipollices, linearum loco semilineae ponendae sunt, & pro integris pollicibus, ac lineis integris deinceps assumendae; inde autem constat in hac barometri specie errores a rarefactione natos duplos esse ipsa rarefactione.

3. Quod si igitur quis paullo acuratior, & diligentior errorem quoque ex minoris cruris rarefactione natum (1) declinare cupiat, in promtu correctio est ab eodem fonte petita: si enim binae scalae construantur, quarum una barometro ipsi apponatur, altera breviori barometri cruri, ita

ita ut haec adſcendendo imminuatur, illa adaugeatur, quamdiu mercurius in eadem denſitate perſeverabit, utraque ſcala eundem gradum oſtendet, mutata vero denſitate, diverſi gradus prodibunt, quorum ſemidifferentia totius voluminis incrementum, vel decrementum ſignificabit. Poterit autem in ſcalis aptandis certa, & determinata mercurii denſitas aſſumi, quod nos in noſtris barometris parandis praeſtitimus: tubo enim cartaceo totum barometrum incluſimus, & comminuta glacie intervallum replevimus, ut in utroque crure congelationis frigore mercurius condenſaretur. Deinceps mercurii altitudinem in utroque crure filo notavimus, & differentia altitudinum inventa, ad utrumque crus opportunam ſcalam aptavimus, quae eam differentiam exprimeret (2).

4. Similibus peractis ſpatium a mercurio congelationis tempore occupatum, quod aequale eſt longitudini cilindri intra cognomines quoſcumque utriuſque ſcalae gradus intercepti, ſemel dimetiendum eſt; huic enim ſi addatur, tota mercurii rarefactio (3) habebitur, quocumque tempore volumen mercurii rarefacti.

5. Porro altitudo mercurii in minori crure eſt minor vera dupla quantitate rarefactionis (2) in eodem crure; rarefactio autem tota aequatur ſummae duplae rarefactionis in minori crure, & rarefactionis mercurii ſupra libellam exiſtentis: quare ſi altitudini minoris cruris addatur rarefactio tota, habebitur altitudo vera aucta rarefactione mercurii ſupra libellam exiſtentis, ſeu aucta ſua rarefactione.

6. Quare ſi fiat, ut volumen totius mercurii rarefacti ad volumen ejuſdem condenſati (4) ita altitudo mercurii rarefacti ſupra libellam (5) ad quartam proportionalem, haec dabit veram mercurii altitudinem (*b*).

C 7. Haec

(*b*) Scalarum conſtructio ea eſt, ut gradus in inferiori deſcendant, dum in ſuperiori aſcendunt, quo fit, ut extremitates columnae mercurii fri-

7. Haec autem correctio tum accuratioribus, ut diximus, ſatisfacere poteſt, tum uſui eſſe, quando mercurius deſcendit per inſignem altitudinem, & propterea rarefactio minoris cruris inſigniter augetur, quod in altiſſimorum montium altitudine barometri ope dimetienda fere contingit, quando correctionis uſus in primis neceſſarius videtur ob frigus in montibus magis, magiſque plerumque adauctum, prout loci altitudo adaugetur. Coeterum cum aſcenſus mercurii in minori crure, ex maxima atmoſpherae mutatione ſit unius pollicis cum dimidio, ſi minima mercurii altitudo in eodem crure ponatur ſemipollicis, erit altitudo maxima duorum pollicum, atque adeo ejus rarefactio erit $\frac{1}{15}$ circiter rarefactionis in crure majore, & altitudo ab ipſo crure notata pro vera aſſumi plerumque poterit abſque ſenſibili errore.

8. Hoc

gore glaciali condenſati ſemper ad gradus cognomines pertingant, qui gradus exprimunt altitudinem ejuſdem mercurii condenſati ſupra libellam; ſit itaque in hoc mercurii ſtatu numerus graduum, quem utraque ſcala quocumque dato tempore exhibet, $= r$, & immutato atmoſpherae pondere ponamus mercurium ſubito rarefieri evidens, eſt quantitates materiae in unaquaque columna eaſdem remanere debere, dum ejuſdem volumina per ſpatia quaevis augebuntur. Exprimantur haec columnarum incrementa per m, & n, & quoniam menſurae graduum in ſcalis dimidiae tantum ſunt verarum, prodibunt in ſcala ſuperiori gradus $r + 2m$, & in inferiori $r - 2n$; hi ſunt gradus, qui ex immediata obſervatione ſemper habentur. Sit itaque numerus graduum in ſcala ſuperiori a mercurio notatus $= a$, & numerus graduum reſpondens in inferiori $= b$, & erit $r + 2m = a$; $r - 2n = b$ ſubtrahatur haec aequatio ab illa, & reſiduo per 2 diviſo exurget $m + n = \frac{a-b}{2}$; quae adeo erit aequalis rarefactioni totali. Addantur nunc ambae aequationes, & ſummis per 2 diviſis habebimus $\frac{a+b}{2} = r + m - n$, quae formula, ut videre eſt exhibet volumen primum mercurii ſupra libellam, cum ſua rarefactione, quae aequatur differentiae rarefactionum ambarum columnarum. Si itaque c ſit longitudo totius cilindri mercurialis frigore condenſati; ſequentem analogiam poterimus inſtituere $c + \frac{a-b}{2} : c = \frac{a+b}{2} : \frac{ca+cb}{2c+a-b}$, quae quarta proportionalis exhibebît quocunque tempore altitudinem mercurii ſupra libellam ad eundem ſemper condenſationis ſtatum redacti.

8. Hoc porro barometrum quanquam duplo minus ſenſibile ſit, quam reliqua, plures tamen utilitates complectitur, quod nec ſcalam mobilem poſtulet, nec obnoxium ſit depreſſioni ex tuborum anguſtia natae, nec demum ob caloris, frigoriſque viciſſitudines, in errorem inducat.

DE FALLACIA METHODI DIMETIENDI QUANTITATEM ATTRACTIONIS.

INquiſiturus, num aliqua, & quanta mercurium inter, & vitrum adhaeſio intercederet, utebar methodo a Tayloro, aliiſque tradita, ex altero nempe bilancis brachio vitrum planum ſuſpendebam in ſitu orizontali, & appoſito in altero brachio aequipondio, ſuppoſitoque mercurio, vitri inferiorem ſuperficiem mercurii ſuperficiei aptabam, & ex pondere in altero bilancis brachio addendo ad vitrum e mercurio divellendum adhaeſionis vim metiebar, cumque non exiguum pondus ad id requiri experirer, maximam mercurium inter, & vitrum adhaeſionem ea methodo me inveniſſe, ac demonſtraſſe exiſtimabam. Fallacem methodum eſſe amice monebat Ludovicus de la Grange, eamque adhaeſionem externi aëris preſſioni aut totam, aut ex parte eſſe adſcribendam, cumque reſponſionis loco nihil ſuppeteret, quod afferrem, niſi Cl. Virorum auctoritatem, qui ea methodo eodem ſcopo ſaepe uſi fuerant, ad experimentum provocabat inter corpora, inter quae nullam adhaeſionem eſſe, apud Phyſicos in confeſſo eſſet. Itaque unanimes id ipſum experimentum vitro oleo madido, ſubjecta aqua tentavimus, ſed magnum quoque pondus ad id vitrum ab aqua divellendum neceſſarium fuiſſe invenimus; obſervabamus duntaxat, majus, minuſve pondus requiri, prout contactus magis, minuſve eſſet accuratus, prout nempe plures, pauciores ve aëris bullae vitrum inter, & aquam eſſent interpoſitae. Cum autem in eo experimento

reri liceret, ne olei ſtratum minus craſſum eſſet, quam ut ſufficere poſſet vitri, & aquae adhaeſioni prohibendae aliud in hanc rem libuit inſtituere. Nempe vitrum operuimus ſebi ſtrato ultra ſemilineam craſſo, & nihilominus idem fuit experimenti exitus, ex quo conſtitit novem, & ultra unciarum pondus neceſſarium fuiſſe ad ſuperficies 10. circiter pollicum quadratorum divellendas. Sebum porro omnem aquae ad vitrum adhaeſionem impedire Phyſici conſentiunt, & demonſtrat experimentum, quo tubi capillares intus ſebo inuncti aquam ſupra libellam ſuſpenſam non retinent, obſervante Sigornio, ex quibus conficitur eam methodum a Phyſicis adhibitam, veram adhaeſionis menſuram non praebere.

DE ASCENSU, ET DESCENSU THERMOMETRORUM VARIIS LIQUORIBUS MADENTIUM EX INFLATO VENTO.

THermometra humida, ſi vento ejuſdem temperaturae perflentur, aut ſi ventus ipſe humidus ſit, inſigniter deprimi Muſſchenbroeckius ſcribit (*a*), quod porro phaenomenon cum ſingulare videretur, libuit variis liquoribus rem eamdem tentare. Talis autem fuit experimentorum exitus.

Aqua, vini ſpiritus, acetum, lac, cremor lactis thermometri deſcenſum praeſtabant; petroleum, eſſentia caryophillorum, oleum olivarum, oleum lini adſcenſum efficiebant, ac demum oleum Tartari per deliquium ad aëris temperaturam redactum nihil mutabat, adeout, inflato aëre, thermometrum immobile permaneret. Ut autem certiores fieri poſſemus, num revera ex vento thermometrum adſcenderet, aut deſcenderet, ſi de iis liquoribus quaeſtio erat, qui adſcenſum faciebant, iiſdem frigidioribus utebamur,

(*a*) Eſſai de Phyſique §. 962.

mur, quam eo tempore atmoſphaera eſſet; ſic enim inflato vento prius ad atmoſphaerae calorem aſſurgebat thermometrum, dein flatu continuato majorem altitudinem aſſequebatur, & poſtea in aëre relictum ad atmoſphaerae temperaturam redibat, ac demum ſi in eum liquorem immergeretur, iterum deſcendebat. Contra autem, quando de liquoribus agebatur, qui deſcenſum facerent, eoſdem calidiores parabamus, quam atmoſphaera eſſet, ut pariter venti effectum exploratum, certumque haberemus.

Recenſita porro experimenta nulli hactenus cognitae ignis, caloriſve proprietati accommodari poſſe videntur. Si enim dicas, vi ſalium in aëre contentorum, liquores, quibus thermometra madent, refrigerari, aut incaleſcere, qui vero fit, ut oleum tartari, quod maximam cum acidis per atmoſphaeram diffuſis efferveſcentiam efficere, maximum inde calorem producere deberet, nec minimum pariat caloris, aut frigoris gradum? Sin vero ad attritum confugias aërem inter, & liquores, quibus aſperſa thermometra ſunt, primo quis dixerit ex aquae, & aquoſorum humorum attritu frigus produci? deinde vero hactenus in ea theoria illud firmum, ratumque habitum eſt, quod calor non ſolum attritui reſpondeat, verum etiam liquorum indoli plus, minuſve pinguium, atque adeo magis, minuſve inflammabilium, a qua quidem lege noſtra experimenta longiſſime abſunt. Quid enim macrius oleo tartari? quid vini ſpiritu inflammabilius? quid pinguius lactis cremore? veruntamen oleo tartari nullum frigus gigni, ingens ex vini ſpiritu, & cremore lactis oriri, ipſa experimenta conſtantiſſime docuerunt.

Nobis igitur rem ipſam propoſuiſſe ſuffecerit; rei cauſſam diligentioribus inveſtigandam relinquemus, forte etiam nos ipſi aliquando proponemus; experimenta enim aliqua inchoavimus, quae ſi eumdem eventum conſtanter habeant, ad hanc, aliaſque caloris, frigoriſque cauſſas aſſequendas conducere poſſint.

DE

DE CAUSSA EXTINCTIONIS FLAMMAE IN CLAUSO AERE.

1. CUM Eques Salutius definire ſtuderet, num elaſticum fluidum a pulvere pyrio erumpens alendae flammae aptum eſſet; quaeſtio exorta eſt cur clauſo in ſpatio flamma diu vivere nequeat, eaque occaſione variae Phyſicorum de hac re ſententiae in medium prolatae ſunt, ut ſi fieri poſſet, potiſſimam, ac veritati proximam aſſequeremur.

2. Inter caeteras celebris illa adducebatur, qua flammae extinctio vaporibus haeterogeneis tribuitur ab ipſa erumpentibus, quibus incluſus aër abſorbeatur, aut ejus elaſticitas deſtruatur, unde is, qui reſiduus eſt minorem elaſticitatem exerceat, quam ſuſtentanda flamma poſtularet (*a*). Hanc vero non levibus difficultatibus obnoxiam eſſe proponebam, cum vix ad aliquot pollices elevato mercurio clauſo in ſpatio flamma extinguatur (*b*), etſi in montibus, ubi longe rarior aër exiſtit, quam commode vivat; quod ſi a vaporibus, ac fuligine flamma extingueretur alcoholis flammam diutiſſime clauſo in ſpatio victuram eſſe colligebam, cum ab eadem fuligo nulla emanet, nec niſi aquei vapores aliqui erumpant (*c*): quoniam vero diverſus fuit experimenti exitus, & alcoholis flamma citius quam ſebi,

(*a*) L' on ne doit pas attribuer à la perte de l' éſprit vital de l' air l'extinction de la flamme de la chandelle, & des méches ſous des récipiens, mais aux vapeurs fuligineuſes, & acides, dont l' air ſe charge, & qui détruiſant l' elaſticité de cet air, empêchent, & retardent l' action, & le mouvement elaſtique du reſte. Statiq. des vegetaux exp. 117. p. 223.

(*b*) Poſt abſorptam $\frac{1}{37}$ aëris flammam extingui Mayovv, poſt abſorptum $\frac{1}{27}$ Haleſius tradit l. c. exp. 106. p. 200. 201.: imo, ne uno quidem pollice elevato mercurio, flammam extinctam fuiſſe ipſe Haleſius tradit l. c. exp. 115. p. 223. 224.

(*c*) Boerrhauv. elem. chem. t. 1. p. 170. 171. edit. pariſ.

ſebi, aut pinguis olei extincta eſt, mea exinde magis dubitatio augebatur (*d*).

3. Interea Ludovicus de la Grange experimento alio prioris opinionis infirmitatem evincebat. Accenſam ſcilicet candelam ita vitreae campanae ſuppoſuit, ut campana ipſa ſpatium non clauderet, ſed ejus inferior limbus a tabula, cui candela inſiſtebat, aliquot tranſverſos digitos diſtaret, at flammam non minus perire obſervavit; quanquam ampliſſimus externo aëri ſub campanam aditus pateret, quare nobis etiam apertius perſuadebatur ex defectu aëris, aut ejuſdem abſorptione clauſam flammam non extingui.

4. Cum id Vir induſtrius obſervaſſet, explorare inſuper coepimus, num intra recipiens in ſuprema parte amplo foramine pertuſum flamma vivere poſſet, ſed ſimiliter extingui experti ſumus: Jam igitur binos in ſuprema parte hiatus experiri libuit, quos ſimiliter ſuſtentandae flammae ineptos eſſe comperimus, tum vero obſervavimus foramina non majora flammam ſervare, ſi alterum in ſuprema recipientis parte, alterum in infima pateret, cumque varias apertionum poſitiones, variaſque earundem combinationes Ludovicus de la Grange ſimiliter tentandas propoſuiſſet, ad id Eques Salutius lanternam ex albo ferro conſtruendam curavit, quæ undique accurate clauſa erat; ſed duobus in ſuprema parte foraminibus hiabat, duobus in media, totidem in infima, quorum unumquodque pollicem circiter diametro patebat, & ſubere obturari pro lubitu poterat.

5. Hac uſi, obſervavimus bina oſtia ſuperiora, aut media, aut infima ſuſtentandae flammae non ſufficere, ſufficere au-

(*d*) Deinceps cum Boylei opera pervolverem haec jam olim ab eximio Phyſico animadverſa fuiſſe comperi, qui cum alcoholis flammam clauſo in ſpatio extinctam fuiſſe naraſſet, haec addit *poſt flammae extinctionem aër in recipiente alteratus viſibiliter non fuit, & quantum ex judicandi modis, qui ad manum tunc erant percipere potui, aër, vel omnem ſuam elaſticitatem, vel ſaltem longe maximam ejus partem retinebat*. Vid. ejus ſuſpic. de latent. aëris qualit. tom. 2. p. 8. edit. Genev. 1680.

autem duo alia quaevis, si modo eorum unum supra flammam, alterum infra ipsam situm esset; quinimo unicum ad basim lanternae sufficere Eques Salutius demonstravit, si ita lanterna agitaretur, ut modo superiora, modo inferiora flamma teneret.

6. Ex quibus experimentis cum constare videretur per foramen alterum, & quidem per inferius ingressuro aëri, per alterum, & quidem per superius eidem egressuro aditum liberum esse opportere, ut flamma sustentaretur, eam tamen aëris per foramina directionem levibus corporibus admotis de la Grange tutius, certiusque definire cupiebat.

7. Id facilius appositis valvulis perfici posse animadverti, & quidem observavimus ex tali valvularum dispositione, ut per superius foramen aër egredi, per inferius ingredi posset, flammam vivam mansisse, ex opposita ipsarum directione interiisse, ita ut in primo casu valvulae a foraminum margine sponte recederent, in postremo contra eundem aptarentur.

8. Quum igitur id constitisset, per inferius foramen ingredi, per superius egredi aërem debere, ut flammam sustentare possit, experiri volui, num tubo curvo communicationem inter superius, inferiusque foramen perficiente flamma intra clausum spatium servari posset; sed nihilo secius extingui observavi, quam si nulla hujusmodi communicatio intercessisset.

9. Halesius porro crus alterum syphonis per apertum excipuli pneumatici verticem ita trajecit, ut ad lancis fere contactum perveniret, ejusque cruris orificium tribus laneis tegumentis munivit: candela sub eo recipiente posita intra pauca minuta extinguebatur, quanquam tunc temporis Halesius aërem exhantlando renovaret; nam per lanea syphonis tegumenta libere adeo externus aër in exantlati locum penetrabat, ut mercurii altitudo, ne uno quidem pollice augeretur (*e*).

(*e*) Statiq. des vegétaux exp. 115.

10.

10. Experimentum hoc, cum de la Grange perpenderet, ideo flammam extinctam fuisse opinabatur, quod aër in inferiori tantum recipientis parte renovaretur, dum is, qui in superiori continebatur, immotus remaneret: victuram itaque flammam sperabat, si a superiori recipientis parte aër hauriretur, novusque aër in subducti locum per lancis foramen ingredi posset, sic enim talem aëris cursum produci, qualis a flamma libero in aëre excitari solet (7).

11. Aptabat itaque ad lancis foramen, quod in antliam patet tubum ejus longitudinis, ut ad superiorem recipientis partem perveniret, & flammam ita sub recipiens collocabat, ut foramen aliud lancis, per quod barometrum traduci solet, intra recipientis ejusdem ambitum comprehenderetur, & externo aëri in recipiens aditum praeberet: his ita paratis, etiamsi epistomium machinae pneumaticae apertum esset, & binis foraminibus, superiori altero, altero inferiori cum externo aëre recipiens communicaret, candela brevi extinguebatur.

12. Quod si aërem ex suprema parte per tubum hauriret, novusque interim aër per lancis foramen in inferiorem penetraret, flamma servabatur, & tandiu quidem, quamdiu emboli motus perseverabat, ex quibus constitit foramina, quae servandae flammae inepta sint (11), servare utique posse, si cursus aëris ab inferiori ad superius foramen ex arte producatur.

13. Quandoquidem, ut dictum est, (8) tubus, qui communicationem inter superius, inferiusque foramen efficiebat, flammam non servaverat, conjecturam fecit de la Grange intra vas clausum aëris circulum sponte perfici non posse, qui si ex arte excitaretur, fortasse non aliter flammam, quam in praecedenti experimento sustentaret. Ut id experimento decerneret curvum vitreum tubum ex eo foramine, quo antlia pneumatica cum externo aëre commercium habet ad supremam apertam recipientis pneumatici

partem deduxit, accurateque glutinavit, & accensam candelam sub recipiente inclusit, cumque mox extinctioni proxima esset, embolum agitavit, epistomium ita versando, ut educto embolo aërem per tubum ex suprema recipientis parte exugeret, eodemque restituto per lancis foramen in inferiorem urgeret: tum vero observavimus singulis emboli agitationibus refocillari flammam, sensimque haud minus vividam reddi, quam in aperto aëre futura fuisset; ac talem tandiu servari, quamdiu motus emboli perduraret, eodem cessante paullatim languere, iterumque extinctioni proximam eadem arte restauravi; hasque languoris, vigorisque vicissitudines induci pro lubitu posse; quod si emboli motus per aliquot secunda deficeret, extinguebatur. In hoc autem experimento tentando, prius embolum agitari oportebat, quam omnia accurate glutinata essent, ne praepropere flamma interiret, & barometrum aptare neglegimus, quod nos certiores redderet, num omnis externo aëri aditus interclusus esset, sed rei novitate, & elegantia delectati, statim de commodiori experimenti specie cogitavimus, quae vitae usibus inserviret.

14. Id autem obtineri posse animadvertimus, si recipiens undique accuratissime clausum foramine uno in suprema parte, altero in infima pertunderetur, hisque valvulae ea lege aptarentur, ut superior erumpenti aëri cederet, irruenti resisteret, inferior vicissim in recipiens aditum praeberet, regressum interciperet, quibus ita comparatis per curvum canalem ad recipiens feruminatum communicatio induceretur inter utrumque foramen, ipsoque demum pertuso canali, ad aperturam follis tubus accommodaretur; sic enim dilatato folle aërem ex superiori recipientis parte tantum hauriri, eodem compresso in inferiorem ejusdem partem urgeri, talemque aëris circulum produci, qualem clauso in spatio flamma sustentanda postulabat (13).

15. Lanterna itaque ex albo ferro expoſita arte conſtructa fuit, quae anteriori in parte plano vitro ad ferrum quam exacte ferruminato, ac glutinato claudebatur, ut ipſius cavitas conſpici poſſet. Lanternae porro fundus rotundo foramine pertuſus erat, quod in tubum aliquot pollices longum ſupra internam fundi faciem normaliter junctum aperiebatur. Tubus alius planae laminae normaliter inſiſtens priori congruebat, & accenſam candelam recipere poterat, ac ſuſtinere: ſuperior autem planae laminae facies molli cera obducebatur, ſic enim tubo hoc in priorem immiſſo, candela in lanternam inſinuabatur, & interea plana baſis ſuperiori facie, qua cera obducta fuerat, contra lanternae fundum compreſſa, eidem adhaerebat, & exterioris aëris ingreſſum prohibebat. Reliqua ſe habebant, ut §. praecedente propoſitum fuerat: duntaxat notandum follis, quo uſi fuimus, poſteriorem aperturam, ſuperpoſito corio, ac rite glutinato obturatam fuiſſe: his ita diſpoſitis experimentum aggreſſi fuimus, quod expectationi noſtrae reſpondit; candelam enim mediocrem, quae intra recipiens ſibi relicta minuto temporis extinguebatur, tamdiu vivam ſervabamus, quamdiu follem agitare lubebat, & intermiſſa paulliſper agitatione languidam cernebamus, quae mox, eadem renovata, reſtaurabatur.

16. Etſi vero lanternam accurate clauſam optaremus, talem nihilominus ab artifice non obtinuimus, ſed ſingulis follis agitationibus aëris irruentis, aut prodeuntis ſibilum percipiebamus, inprimiſque citra vitrum, tumque ex follis agitatione flamma vehementer commota extinguebatur, praeſertim ſi paullo celerius follis agitaretur: poſtquam vero pleraſque lanternae juncturas ſuperinducta cera, & maſtice glutinavimus, deſcriptum lanternae effectum demum obtinuimus; quapropter in noſtra opinione fuimus confirmati non ex renovatione, ſed ex circumductione aëris flammam

 ſer-

servari, siquidem quo accuratius novus aër arcebatur, eo magis quieta, & incolumis apparebat.

17. Interim non inopportunum existimamus ea afferre, quae Cl. P. Beccaria in suis physices lectionibus in hanc rem protulerat, ea autem hujusmodi sunt.

„ Primo flammam ex charta excita sub flamma candelae: „ extinguitur; ea enim aërem disjiciens infra candelae flam- „ mam constitutum, facit, ne aëre undique ambiente flam- „ ma candelae libretur, contineatur.

„ 2. Candelam accensam supponito vasi undique clauso: „ brevi extinguitur; supponito vasi clauso undique, quod „ tamen prope fundum communicet cum aëre ambiente: „ extinguitur.

„ 3. Supponito vasi undique clauso, praeter quam in „ vertice, ubi foramen hiet pollicare: extinguitur.

„ 4. Supponito vasi, in quo foramen pollicare duplex, al- „ terum basi flammae depressius, alterum altius: vivet „ flamma, atque non verticali emicabit directione, sed „ obliqua; apice nimirum suo declinabit a loco foraminis „ depressioris in locum foraminis altioris patentis in latere „ opposito vasis.

„ Quae omnia non solum probant aërem esse neces- „ sarium, qui flammam reverberet undique ad flammam „ alendam, sed plane etiam evincunt aëre opus esse, qui „ certa circumeat lege; flamma nimirum suo apice immi- „ nentem sibi aërem perpetuo deturbat, illi aër succedit, „ qui basi flammae adjacet; novo ergo aëre continenter „ opus, qui adfluat ad basim, dimotoque ex apice aëri „ succurrat.

„ Ratio ipsa, qua servatur ignis in prunis accensis, vel „ ratio potius, qua fit, ne ignis in prunis accensis grassans, „ ipsas velociter exolvat in cineres, eamdem confirmat, „ quam superius constitui veritatem; nimirum cineribus „ obvolvuntur accensae prunae, ea res facit ne recens con-

„ tinuo

„ tinuo aër reverberet ignis particulas, prunaſque adeo ſer-
„ vat diutius. „ Hactenus Vir Clariſſimus. Quid vero de hiſce ſentiendum videatur ex ſequentibus apparebit.

18. Poſtquam quae tentavimus de flamma experimenta in eum qualemcumque ordinem redegiſſem, quo propoſita leguntur, Eques Salutius nova inſtituere aggreſſus eſt: inveſtigare nimirum voluit num aëris fluxus, qui ab inferiori ad ſupremam clauſi recipientis partem dirigeretur, flammam quoque ſuſtentaret, etſi hujuſmodi directio, directioni, quam aër circa flammam ſponte ſequitur, oppoſita eſſet.

Itaque ſiphones binos ex vitro ſelegit, quorum crus alterum intra clauſum recipiens inſinuavit, dum alterum extra ipſum emergebat: incluſa crura non eandem habebant altitudinem, ſed unum ſupra flammam eminebat, alterum infra ipſam deprimebatur: ex hoc aërem ore exhantlari, juſſit, atque ejuſmodi exhantlationibus flammam vivam ſervari obſervavit, quanquam aër ex infimo ſiphone eductus nonniſi ab aëre per ſupremum ſiphonem irruente reparari poſſet, ſicque a ſuperiori ad inferiorem ſiphonem aëris curſus dirigeretur. Ceſſante exſuctione flamma extinguebatur, quemadmodum juxta §. 11. contingere debebat: jam vero binos ſiphones adhibuit, quorum incluſa crura, vel utraque ſupra flammam eminebant, vel utraque eadem depreſſiora exiſtebant, & in utroque caſu, hauſto ex altero ſiphone aëre, flammam vixiſſe deprehendit.

19. Haec autem experimenta eo magis paradoxa nobis videbantur, quod poſtremum Haleſii experimento ſuperius deſcripto (9) oppoſitum eſſet; itaque tum caetera experimenta, tum inprimis hoc ipſum non ſemel, aut iterum, ſed ſaepius omni diligentia, ac ſollicitudine inſtituimus, cumque eventus idem conſtantiſſime ſe proderet, ſuſpicati ſumus Haleſium ampliori, altiorique recipiente uſum fuiſſe, adeo ut fluxus aëris ab uno ad alterum inferiorum foraminum abſolveretur, intereaque aër ſuperior, qui flammam

cir-

circumdaret, immotus remaneret, vel eundem Halesium sero nimis embolum agitasse, flamma jam languida facta, vel demum majori, minorive, quam par esset, celeritate embolum commovisse, eo vel maxime, quod ex postremis hisce caussis, flammam in nostris experimentis non semel extingui contigisset.

20. Neque solum alienis experimentis, verum etiam nostris, & praeconceptae theoriae mox proposita experimenta adversari videbantur: nam ex illis conficiebatur, vel qualencumque aëris motum, & agitationem flammae servandae aptam esse, vel flammae vitam non ab aëris motu, sed ab ejus renovatione repetendam esse. Itaque unum, eundemque inclusum aërem agitare primum coepimus, ut videremus, num agitatio aëris, quae ipsius renovationem nullam producat, flammae servandae sufficeret; si enim secus contingeret, concludendum erat motum aëris non per se ipsum flammam servare, sed quatenus per motum continua aëris mutatio perficeretur: cum vero aëris varia agitatione flamma sustentari non potuisset, tunc eo magis dubitavimus, etiam in proposita machina (15) flammam vixisse ob aëris renovationem potius, quam ob ipsius circuitum certa lege, certaque directione excitatum: dilatato enim folle, si aliquod vel minimum in machina foramen remaneret, tantum aëris per ipsum in machinae cavitatem penetrare oportebat, quantum aucta erat aperti follis capacitas, eodemque constricto, aequalis aëris quantitas per idem foramen iterum erat expellenda, eaque ratione aër renovari potuisset.

21. Experimentum quidem in machina pneumatica primum fuerat institutum, sed cum nullum barometrum fuisset appositum, quo certi essemus externum aërem prohibitum fuisse (13), ideo illud experimentum apposito siphone iterandum esse censuimus; cum vero ea methodus incommoda esset ob multiplices juncturas, quae promte pro quovis

expe-

experimento erant perficiendae, commodiorem apparatum Eques Salutius exhibuit: binos ſcilicet tubos vitreos binis machinae pneumaticae foraminibus, per quorum alterum aër hauriri, per alterum expelli ſolet, firmiter glutinavit, qui quidem tubi ab illis foraminibus diſcendentes, ita protendebantur, ut ad vas aquam continens pervenirent, ibi flexi normaliter erigebantur, ita ut alterum aliquot tranſverſos digitos ſupra aquae ſuperficiem aperiretur, alterum multo altius deſineret: tuborum aperturae conis cartaceis tegebantur, ut aëris introëuntis, aut prodeuntis impetus frangeretur, ex quo vicina flamma extingui potuiſſet: deinde inter binos tuborum ramos in eodem vaſe accenſa candela collocabatur, cujus flamma altero tubo depreſſior, altero elatior erat, & medium fere inter ipſorum altitudinem locum tenebat: poſtremo tubi aqua immerſi, & candela ſimul, campana vitrea tegebantur, cujus limbus aliquot tranſverſos digitos infra aquae ſuperficiem demergebatur, eoque pacto aqua omnem externo aëri in campanam aditum intercludebat. Agitato autem embolo, ut per altioris tubi oſtium aër exſugeretur, & mox per inferioris orificium iterum propelleretur, alterne aqua intra campanam aſcendebat, ac deſcendebat, qui quidem aquae alterni motus externum aërem excludi ſignificabant; at vero depraehendimus candelam ex tali aëris ab inferioribus ad ſuperiora circuitu, ſervari non potuiſſe, & ex contraria aëris directione non magis ſuſtentari; quin imo ejus vita ex hujuſmodi aëris circuitibus, non magis durare viſa eſt, quam ſi aërem immotum relinqueremus: quando autem aquae copia minor in vaſe erat, adeo ut educto embolo trans ipſam bullarum ſpecie externus aër in campanam inſinuari, & eodem reſtituto eadem via expelli poſſet, tunc utique flammam ſervari obſervavimus, ex quibus intelleximus in machina ſuperius deſcripta (15), non certa aëris directione, ſed ejuſdem renovatione flammam ſuſtentatam fuiſſe

(e);

(*e*); ex aperturis citra vitrum aeque periisse (16), non quod externus aër admitteretur, sed quod directe nimis aëris unda in flammam irrueret.

22. Neque vero difficile est intelligere, cur per bina foramina, quae verticalia non sint, aut in apparatu §. 11., & 18., aut demum in nostra machina, aër sponte non renovaretur; nam aër ex flamma rarefactus, ac specifice levior a graviori aëre circumposito ad superiora impellitur, nec nisi ea directione e lanterna prodire potest; ut autem expellatur necesse est externum aërem, & quidem per inferius foramen, eidem succedere; nam si externo aëri per superiora tantum foramina aditus pateat, is suo nisu rarefactum aërem, qui contraria directione prodire conatur, intra lanternam coërcebit, nisi tanta fuerit superiorum foraminum amplitudo, ut ingressuro, & egressuro aëri eodem tempore transmittendo sufficiant, quo in casu per ea sola foramina aër renovari poterit, & flamma servari: & hanc quidem theoriam experimento alio de la Grange confirmat (4); nam lanternae ostio inferiori patente, ad ostium superius tubum curvum accommodat, qui si sursum vergit, flammam servat, si deorsum, eandem suffocat, quod scilicet sursum vergens, aëri rarefacto, & ad superiora tendenti aditum praebeat, deorsum directus, aëris rarefacti directioni opponatur, eundemque intra lanternam coërceat. Ex his etiam deducitur, in experimento Equitis Salutii, unico foramine flammam vixisse, non quod foramen superiora modo, modo inferiora teneret (5), sed quod ex agitatione per unicum etiam foramen aër renovaretur, qui, lanterna quiescente, renovari non potuisset.

23. Id igitur commodi habet proposita machina, ut aërem renovet, quando sponte non renovaretur, adeoque iis in locis flammae sustentandae inservire poterit, ubi ob loci figu-

(*e*) Jam aliqua talis machinae species apud Boyleum extabat (nov. exper. de relat. inter flammam, & aërem exp. 4. p. 21.), qui folli communi, & in posteriori parte aperto ad renovandum aërem utebatur.

figuram aër circa flammam ſponte renovari non poteſt, quae ob eam cauſſam cito ſuffocatur. Quum vero ea renovatio per quaevis minima foramina eo pacto perfici poſſit, per quae ignis ſcintillae tranſmitti nequeunt, machinam eandem utilem eſſe poſſe cenſemus, ſi quando nocturno tempore pulvis pyrius conficiendus, aut aliquo modo pertractandus ſit, cum omni incendii periculo vacet: in ea autem machina valvulas ſupervacaneas fuiſſe poſteriora experimenta (18, & ſeq.) demonſtrarunt. Et priorem quidem theoriam (15, 16) minus accuratis experimentis (13) innixam miſſam féciſſemus, niſi ejus fama evulgata fuiſſet. Noſtrum igitur eſſe duximus magnorum virorum exemplo candide rem totam profiteri, eoque libentius id fecimus, ut oſtenderemus Cl. Viris, quorum ſententias alicubi minus probavimus, nos non contradicendi ſtudio, ſed veritatis amore in id adductos fuiſſe, cum eandem nos in emendandis opinionibus noſtris ſeveritatem, quam in aliorum ſententiis perpendendis adhibuerimus.

24 Poſtquam ſolum aëris circuitum flammae ſervandae ineptum eſſe comperimus, tela lanea oleo tartari imbuta tuborum orificium Eques Salutius munivit, ut aër per illam trajectus a vaporibus expurgari poſſet; Haleſii, ut ita dicam, conjectura excitatus (*f*), veruntamen flamma cito interibat. His non contentus ſuperius aperti recipientis oſtium ampullae ventre replevit, & commiſſuras glutinavit, venter autem ex contenta aqua frigidus ſervabatur, eoque artificio aërem a flamma ſub recipiente poſita rarefactum, & admixtos vapores refrigerare, ac condenſare contendebat, ut flammae vita produceretur; ſiquidem ex nimia ambientis aëris rarefactione, aut admixtis vaporibus interiret: ſed hoc tentamen non minus inutile fuit, quam praecedens, idemque fuit eventus, quando *refrigeratorium*,

E &

(*f*) Exp. 117. p. 232. 233.

& filtrationem ſimul adhibuit, cum inde flammae duratio ſenſibiliter producta non fuerit.

25. Tum ego non per telam tantum liquore imbutam, ſed per craſſum diverſorum liquorum ſtratum aërem flammae circumpoſitum crebro trajiciendum ſuaſi, cum ſuperioris experimenti (23, 24) apparatus opportunus eſſet, dummodo brevior alterius tubi ramus, per quem aër in recipiens reſtituitur, ad liquoris fere libellam frangeretur. Ita enim exhantlato äëre ex altiori ramo, ſicque elevato liquore, brevioris rami aperturam liquore ipſo tegi oportebat, & propterea aër per eam aperturam impulſus, in recipiens penetrare non potuiſſet, niſi per ſuperpoſitum liquoris ſtratum bullarum ſpecie permearet, qua trajectione non modo a vaporibus expurgari, ſed & refrigerari, ac condenſari debuiſſet: ad praeveniendam vero liquoris in breviorem immerſum tubum, indeque in antliam pneumaticam irruptionem Eques Salutius ipſum non recta ex antlia in vas aquam continens deduci, ſed in arcum flecti curaverat, qui continuus non erat, ſed in ſuprema parte interpoſita phiala vitrea interruptus, ut in ipſam abſorptus liquor proprio pondere deponeretur. His ita paratis aërem per aquam, per oleum, per nitri ſolutionem, per fortem ſolutionem ſalis tartari ſucceſſive trajecimus, ſed flammae recipienti incluſae vita haud ſenſibiliter inde protracta fuit.

26. Quoniam igitur conſtiterat non fumo, aut aquoſis vaporibus (1, 24, 25), non abſorpto aëri, aut deſtructae ejuſdem elaſticitati (3, 4), non ipſius rarefactioni, propter quam ad flammam circa elycnium coërcendam ineptus evadat (24, 25), flammae extinctionem clauſo in ſpatio tribuendam eſſe, unica ſupererat hypotheſis a Phyſicis propoſita, quod ſcilicet flammae nutrimentum clauſo in aëre contentum a flamma brevi abſumatur (*g*), & id quidem nutrimen-

(*g*) Quae Boylei conjectura eſt in ſuſpic. de latent. aër. qualit. p. 8, & Muſſcenb. Eſſai de Phyſiq. §. 999., & Laghii Commen. Bonon. t. 4. pag. 88.

mentum a nitrosis salibus per aërem diffusis in primis ortum ducat: quae hypothesis aliquam veri speciem praeseferre videbatur, tum ex eo, quod caeteras reijciendas esse experimenta demonstraverant, tum quod pinguia corpora nitrata, ut pulvis pyrius, vel in vacuo boyleano flammam concipiant; sperabam igitur candelam diutius intra clausum spatium victuram, si nitro pulveratò elycnium, & sebum inspergerentur, sed aeque cito extincta est. Eques vero Salutius rem eandem aliter tentavit. Nam campanae, qua flamma tegebatur, limbum, in nitri spiritum fumantem immersit, ut inde erumpentes nitrosi spiritus per campanam dispersi flammam circumdarent, sed similiter flammam perire observavit, ac si aqua, vel liquor alius loco nitrosi spiritus campanae limbum obtegisset. Hypothesim itaque consumti pabuli perinde ac caeteras experientia edocti deserendam esse intelleximus.

27. Id nihilominus certum permanere videbatur aërem clauso in spatio ab inclusa flamma vitiari, cum eamdem diutius alere nequaquam posset, etsi quale hujusmodi vitium esset, detegi nondum potuisset: quapropter experiri volui, num aër, in quo flamma sponte extincta fuerat, alteram flammam injectam suffocaret; proinde sub campanam vitream dispositam ut §. 3. accensam candelam per inferiorem aperturam insinuabam, & postquam sponte extincta fuerat, accensam aliam per eandem aperturam immittebam: temporis momento suffocabatur, imo post aliquot minuta accensa candela immissa similiter peribat, ex quo confirmatur per unicam etiam amplam campanae aperturam aërem sponte non renovari (23); idque in caussa esse cur intra ipsum flamma diu vivere non possit.

28. Cum itaque aërem flamma ita perverti observarem, ut post aliquot minuta temporis eandem indolem retineret flammae exitialem, inquirere praeterea constitui, an non longiori temporis intervallo, refrigerato aëre, & flam-

mae vaporibus ad latera excipuli ſubſidentibus, priſtinam ſalubremque naturam aër ille recuperaret: quoniam vero aër intra campanam relictus, quae inferiore parte patebat (§. praec.), leviori quacunque vicinorum corporum agitatione ſenſim ſenſimque renovari potuiſſet, idcirco malui ſupra lancem metallicam duobus rotundis foraminibus perviam campanam eandem glutinare. Per alterum foraminum in lance patentium ſipho vitreus mercurium continens traductus fuerat, & cera firmatus, per alterum accenſa candela in recipiens inſinuari poterat, & interim mollis cera, cui candela inſiſtebat, foramen illud obturabat. Extincta itaque candela vidimus mercurium in ſiphone contentum adſcendiſſe, ob condenſationem ſcilicet aëris, qui a flamma fuerat rarefactus, forte etiam ob ejuſdem abſorptionem, & mercurii ſupra libellam ſuſpenſio per tredecim, & ultra horas perduravit, quod nos certiores fecit toto eo tempore exteriori aëri in recipiens aditum denegatum fuiſſe, proinde aërem renovari non potuiſſe. Eo tranſacto tempore, imo & multo antea recipientis cavitas limpida facta fuerat, & ad latera vitri ros fuerat depoſitus ex fumis, vaporibuſque extinctae candelae in liquorem condenſatis. Tum igitur candelam prius extinctam, quae obturaculi inſtar erat, leniter eduxi, ne aër recipiente contentus commoveretur, & accenſam aliam per id foramen in recipiens inſinuavi. Vix flamma intra recipiens penetraverat, cum repente extinguebatur, perinde ac ſi in aquam immergeretur (*h*). Quod cum oſtenderet aërem flamma vitiatum diu id vitium retinere, confirmare videbatur ejuſmodi vitium, neque calori,

(*h*) Haleſius accenſam candelam ſub recipiente poſitam, in quo alia mox extincta fuerat, non ſtatim ſuffocari obſervavit, ſed $\frac{1}{5}$ temporis perdurare, quo prior candela vixerat (pag. 202.). Veruntamen id eveniſſe videtur, quod Auctor recipiens e loco movere, & ab aqua, in quam immerſum erat, eximere debuerit, ut accenſam candelam illi ſubſtitueret, quae mox fuerat extincta, illiſque commotionibus recipientis aërem ex parte ita renovaverit, ut flamma aliquamdiu vivere potuerit.

lori, qui jam dudum diſſipatus fuerat, neque vaporum mixtioni, qui condenſati ſubſederant, eſſe adſcribendum.

29. Poſtquam comperiſſem, aërem per flammam traductum, flammae alendae imparem effici, in lanterna, quam deſcripſi §. 4., duo tantum verticalia foramina aperta relinquebam, & accenſa candela intra ipſam incluſa, ſuperiori foramini flammam admovebam; extinguebatur. Aër ſcilicet ab inferiori foramine ad ſuperius movetur (7); propterea flamma ſuperiori foramini admota aërem recipit per flammam lanternae trajectum, qui prava ſua qualitate eandem ſuffocat (§. praec.).

30. Quod ſi inferiori foramini flammam admoverem, candela lanternae incluſa extinguebatur; quod nempe aër per inferius foramen in lanternam penetrans (7), per admotam flammam traïjci cogeretur; a qua ita mutabatur, ut lanternae flammam ſervare non poſſet; extinguebatur autem ſive adpoſita candela ex ſebo eſſet, lanternae vero incluſa ex cera, ſive contra; ſive utraque ex ſebo eſſet, ſive utraque ex cera, ſive aequales, & aequali elycnio praeditae eſſent, ſive alterutra major, majorique elycnio praedita eſſet. Quapropter cum nec alimenti qualitas, nec elycnii magnitudo experimenti exitum immutaverit, videtur aërem per flammam unam trajectum alteri cuicumque alendae aeque ineptum evadere.

31. Quum autem animadverterem, non flammam ſolum, ſed & accenſos carbones (*i*) clauſo in ſpatio ſuffocari, utriuſque phaenomeni eandem cauſſam eſſe ratus, ad inferius lanternae foramen ardentem prunam ita admovebam, ut ab ipſo foramine non nihil diſtaret, & liberum aëri intra lanternam aditum relinqueret; flamma tamen lanternae incluſa ſuffocabatur; quod ſi prunam lanternae includerem, & ad ſuperius lanternae oſtium flammam admoverem, haec protinus extinguebatur.

32.

(*i*) Muſſchenb. Eſſai de Phyſiq. §. 994.

32. Hauksbejus porro fuerat expertus, aërem per candentia metalla trajectum, & intra recipiens collectum, flammae exitiale fuisse. Hac autem methodo praestantissimus Physicus usus est (*K*). Recipiens amplum selegit in superiori parte apertum, cujus apertura lamina cuprea, & interposito molli corio, accurate claudebatur; ex parvo foramine in lamina cuprea aperto tubus erigebatur auricalceus, clavi versatili munitus, ut communicatio inter recipiens, & tubum pro opportunitate induci, vel tolli posset: tubi extremitas opposita in cavitatem crassae mollis cupri insinuabatur, ita tamen, ut inter tubum, & illius massae cavitatem aër penetrare posset; recipiens aëre exhauriebatur: metallica massa interim prunis immersa candebat: clavis aperiebatur: aër in cavum recipiens penetrans per ardens metallum transire cogebatur, a quo ita vitiabatur, ut ablata lamina cuprea tegente flamma in ipsum immersa protinus extingueretur. Quod experimentum cum perpendissem, metalla candentia non aliter aërem vitiasse arbitrabar, quam a flamma, aut accenso carbone nostris in experimentis vitiatus fuisset. Igitur, & inferiori lanternae foramini candens ferrum admovi, ut aër per id foramen irruens ferrum in transitu lamberet. Observavi autem ex ipso ferro lanternae flammam similiter interiisse.

33. Jam vero, si ex vaporum e flamma exhalantium mixtione aër vitiaretur, profecto tot, ac tam diversae substantiae, quibus flamma ali potest, & quae tot diversos halitus emittunt, unum eundemque effectum non praestarent: at demonstravimus non flammas solum diversas, & vario pabulo altas, sed & carbones accensos, imo & candentia metalla proximum, & circumfluentem aërem ita mutare, ut alendae flammae impar evadat. Quapropter calore potius, qui idem est in omnibus hisce corporibus, nec nisi gradu

(*K*) Saggio delle transaz. filosof. del Sig. Dereham t. 3. p. 124.

gradu in ſingulis differre poteſt, quam exhalantibus effluviis, quae mirum in modum in ſingulis diſcrepant, aërem vitiari arbitrabar, eoque magis quod nec condenſatione, nec filtratione, nec ullo alio artificio (24, 25), id aëris vitium emendari, aut imminui potuerit.

34. Obſervaverat porro idem Cl. Auctor, aërem per tubos vitreos candentes trajectum non ſimiliter vitiari: quum vero mea experiundi methodo hujuſmodi tentamina facile perficerentur, libuit & hoc ipſum explorare. Itaque vitri ſolidi maſſam in rudem quandam annuli formam effictam, & extremitati tubi vitrei annexam in ignem injeci, ibidemque retinui donec candeſceret: tum vix ab igne eductam proximae lanternae inferiori foramini admovi, ut aër per candentem annulum tranſire cogeretur: flamma nihilo minus, quam ex candente ferro extincta eſt. Dedimus porro operam in hiſce experimentis, ne candente metallo, aut carbone, aut vitro foramen inferius clauderemus, ſed ad latus foraminis ita aptabamus, ut influentis aëris tranſitum nullo pacto impedirent, adeo ut ſi frigida eodem ſitu aptarentur, nullum incluſae flammae detrimentum afferrent: imo obſervavimus, trajecto per ea candentia corpora aëre, citius, quam eodem intercepto, flammam ſuffocatam fuiſſe. Haec autem experimenta, cum facilia ſint, poterunt qui rebus hiſce delectantur ſuis ipſi oculis eorum veritatem confirmare: id tantummodo caveant velim, ne vitrum nimis tenue ſit, aut non ſatis candens, neve tardius admoveatur; vitrum enim cito calorem amittit, eoque citius, quo tenuius fuerit: unde aëri pervertendo ineptum evadit, quemadmodum experiundo deprehendimus.

35. Quoniam autem vitrum candens effluvia in aërem emittere, aut ex aëre nutrimentum haurire vix veroſimile videtur, ſi ejuſdem fixitatem, & immutabilitatem in igne attendamus, in ea opinione confirmabar, calore potius, quam abſorptis, aut emiſſis particulis aërem labefactaſſe.

36. Sed quae tandem hujusmodi mutatio est ab igne inducta, propter quam aër eidem diutius alendo ineptus fiat? rarefactionem non esse, aut mutatam aliam sensibilem qualitatem, tum vitii constantia ostendere videbatur (17), tum Hauksbei testimonium, qui in aëre per candentia metalla trajecto nullam sensibilium ejusdem qualitatum mutatam, consulto institutis experimentis, se deprehendisse (*l*) testatur; tum demum Greenwoodii tentamina, qui aërem putei, in quem demersa candela extinguebatur, in sensibilibus suis qualitatibus mutatum minime fuisse comperit (*m*). Nihilominus cupiebam aërem, qui per flammam, aut prunam, aut ardens vitrum trajiciebatur, prius per aquam frigidam trajectum refrigerari, antequam ad flammam alendam perveniret, ut rarefactionis suspicio omnis tolleretur. Ad id Eques Salutius per foramen poculi ad fundum pertusi tubum vitreum trajecit, & ita glutinavit, ut poculum infusam aquam contineret, postea superius tubi extremum in inferius lanternae foramen immissum similiter glutinavit, ac demum ad inferiorem aperturam, flammam, prunam, candensque vitrum identidem admovimus, & flammam lanternae inclusam non minus perire observavimus, ac quando haec ad lanternae foramen immediate admovebantur. Quamquam vero aërem trajectum per tubi portionem aquae immersam refrigerari, ac condensari omnino debuerat; ipsum tamen Hauksbei experimentum renovare constitui, ut de aëris condensatione eo tutior esse pōssem; sed tubi ardentes, ex impetu irruentis aëris constringebantur: si vero candens vitrum ad foramen admoveretur, per quod aër in recipiens vacuum penetrare debebat, cito adeo refrigerabatur, ut aër sufficientem caloris gradum experiri non posset, ex eo vel maxime, quod tanta celeritate aër in vacuum recipiens irruat, & tanta proinde celeritate per can-

(*l*) Loc. cit.
(*m*) Lib. mox cit. tom. 5. p. 10. 11.

candens vitrum trajiciatur, ut sufficientem ex ipsius calore mutationem neutiquam pati videatur: idcirco eam methodum deseruimus, eoque libentius, quod simpliciorem, commodioremque Eques Salutius proposuisset, ut scilicet phiala vitrea, longo collo instructa, nudo igni immediate exponeretur. Collo vesicam flacidam circumligavimus, ut aër, qui vi ignis rarefactus e phiala erumpebat, eadem excipi posset; & postea frigore condensatus ex vesica in phialam iterum pelleretur pressione externi aëris, qui eo pacto ab ejusdem cavo arcebatur. Experimentum scilicet expectationi respondit. Nam phiala tamdiu in igne relicta, donec candesceret, vesica intumuit, postmodum, phiala ab igne remota, & refrigerata, pristinam flacescentiam vesica adepta est, fractoque demum inversae phialae collo, & immissa in ejus cavum ardente flamma, protinus extingui observavimus, perinde ac si aër alia flamma corruptus fuisset.

37. Cum vero id experimentum demonstrasset caloris vitalem in minimis particulis aërem componentibus mutationem induci, ut igni sustentando ineptus evaderet; sperare coepi, frigore, quod contrariam mutationem induceret, quaecunque demum ea mutatio esset, pristinam aëris constitutionem restitui posse: et experimentum quidem spem haud frustra conceptam fuisse comprobavit; cum enim candelam accensam per vitreae lagenae breve collum in ipsius cavitatem insinuassem, & accuratissime molli cera colli orificium obturavissem, flammam sponte extingui sinebam, ut aër lagena inclusus corrumperetur: deinde, circumposita glacie, lagenam refrigerari curabam, & per duodecim quidem horas in eodem frigoris gradu detineri; postea, lagena e glacie educta, expectabam, donec ad cubiculi temperaturam ejus calor restitutus esset; & inversa demum lagena, ac referato collo, accensam candelam in lagenae ventrem intromittebam: flamma aliquandiu viva servabatur; idque experimentum aliquoties eodem eventu interavimus. Quando

verò per duas, tresve horas duntaxat intra glaciem lagena detenta fuerat, priſtinam indolem flammae exitialem contentus aër retinebat: ex quibus intelleximus frigus, & quidem diuturnum requiri ad pravam aëris indolem corrigendam, quae ex ingenti calore orta ſit.

38. Idem experimentum etiam in aëre ex ignis exteriori actione corrupto Eques Salutius tentavit: ſcilicet lagenam veſica obturatam, quemadmodum §. praec. deſcripſimus, & ab igne paullo ante eductam in comminutam glaciem immerſit, ibique per plures horas detinuit, ac ſimilem effectum aſſecutus eſt; ut ſcilicet immiſſa in inverſae, & reſeratae lagenae cavitatem flamma, viva ſervaretur. Quae quidem experimenta, quanquam haud facile in praxim traduci poſſint ad flammae vitam clauſo in ſpatio protrahendam; novam tamen lucem in phyſicam quaeſtionem hactenus obſcuriſſimam afferre videntur, eaque de cauſſa Phyſicis haud ingrata futura eſſe ſperamus.

39. Adhuc de poſtremo experimento (37) dubitatio aliqua mihi ſupererat (jamdiu enim vel noſtro periculo didiceram, quanta in experimentis cautela adhibenda ſit), quippe etſi cera, lagenae, quae in glaciem immerſa fuerat, oſtium, qua fieri potuerat accuratione obturaſſem, nullum argumentum ſuppetebat, quo certus eſſem obturaculum omnem externo aëri aditum prohibuiſſe, in primis quando glaciei frigore, condenſato interno aëre, externus in recipiens irruere conabatur. Ut ergo mea haec dubitatio ſolveretur, vas vitreum propemodum cylindricum elegi, quod undique clauſum erat, ſed prope ſummitatem binos tubos continuos habebat, qui in ipſius cavitatem hiabant: tuborum alteri ſipho vitreus mercurium continens conglutinatus eſt, per alterum accenſa parva cerea candela in cylindri cavitatem immiſſa fuit, & interim molli cera, cui candela inſiſtebat, tubum ipſum accurate obturavimus. Flamma per 25.″ aut 30.″ perduravit: poſt quam vero extincta eſt, mercurium in ad-

adnexo ſiphonis crure uno circiter pollice ſupra libellam elevatum fuiſſe vidimus, ſive id ex aëris prius a flammae calore rarefacti condenſatione, ſive ex aliqua etiam ipſius aëris abſorptione oriretur: quando vero vas craſſo glaciei ſtrato undique fere circumdatum, & refrigeratum fuit (iis nimirum exceptis locis, ubi cera tubi obturati fuerant, quae ex glaciei, & aquae attactu a vitro ſecedere potuiſſet) mercurium adhuc tribus, quatuorve pollicibus ſupra libellam elevari vidimus, ex aucta ſcilicet interni aëris condenſatione: addita vero pro opportunitate glacie in ejus locum, quae ſolvebatur, & effluebat, vas in eo ſtatu retinuimus per 6. circiter horas, locus autem mercurii in ſiphone, tum ante admotam glaciem, tum poſt ipſam adhibitam filo notatus fuit: poſtremo e glacie vas eduximus, & in cubiculi temperatura diu reliquimus, ſenſimque ad priorem notam mercurium deprimi obſervavimus, non ultra deſcendere, multo minus ad libellam componi. Ex quo conſequebatur nec aëris elaſticitatem ex eo frigore fuiſſe mutatam (cubiculi enim eadem propemodum temperatura erat) nec exteriori aëri in recipiens aditum toto eo tempore patuiſſe. Tum igitur obturaculum, cui extincta candela inſiſtebat, leniter eduxi, & accenſam aliam immiſi, ipſamque vixiſſe obſervavi, & tamdiu vixiſſe, quam cum recenti aëre vas plenum erat, ut aër ille procul dubio, contractum a priori flamma vitium depoſuiſſet.

40. Boerhaavius porro experimenta plura protulit partim ſua, partim ex aliis Auctoribus ſelecta, quibus probavit, corpora ſulphurea incluſa vaſis, in quae aër non admittatur ex igne extrinſecus admoto, quantumvis vehementi nec inflammari, nec in partes reſolvi poſſe. Quae quidem experimenta, cum ad rem noſtram mirifice faciant, huc afferenda eſſe cenſui. Inquit itaque Vir Celeberimus (*n*).

(*n*) Ch. t. 1. pag. 226.

Unus, idemque ignis, applicatus eidem corpori, ſed cum diverſis circumſtantiis, mirifice totam ſuam actionem variat, inprimis quidem pro vario admiſſu aëris ſimul in operatione ipſa. Sumſerat carbonem Hookius, incluſerat pyxidi ferreae carbonem, dein operculo, cochlea accurate facta adacta, vas accuratiſſime occluſerat. Sic commiſerat ingenti igni diu. Neque interim tam violenta actione ignis carbo exuſtus erat, ubi eximebatur poſtea. Vid. vitam ejus in poſthumis pag. XXI. unde collegerat ſubtilis Philoſophus, aëra eſſe menſtruum, quod agitatum igne, omnia diſſolveret corpora ſulphurea; quum ignis ſine aëre id praeſtare non poſſet: idem in deſtillationibus jam olim Helmontius in carbone ſuo fixo obſervaverat. Et Papinus Recueil des machines pag. 25. 26.. Et ſcobem ego lini guajaci ſubtilem, coram vobis, utſi adeo diuturno, adeo violento igne; oſtendi tamen nigerrimam foecem ſuperſtitem retinuiſſe oleum ſibi, nulla ignis potentia ex retorta expellendum. Simulac vero pulverem hunc carbonarium, patina larga exceptum, parva ſcintilla impoſita, examinabam, ſtatim omne nigrum oleum, cum fumo aromatico, cedrino, conſumebatur, & vertebatur ſcobs in cineres incluſos, candidos. Camphoram ſpectate, Auditores. Tota in aëre conſumitur incenſa ſemel, licet aquae innatet. Pone in vaſe vitreo puro, cum alembico impoſito, ſupra ignem, liqueſcit, aſcendit in alembicum, concreſcit in novam, eandemque iterum immutatam camphoram, idemque obſervabitur repetenti ſaepius. Nonne ſulphur vaſis clauſis coercitum, ſublimatur centies, ſemper manens ſulphur idem? Si vero inter ſublimandum rimam vas contraxerit, atque liquefactum ſulphur hac rima aëri contiguum evaſerit, flammam capit ſubito, atque ocyſſime in flammam caeruleam; & acidum fumum reſolvitur. Succinum certe in aëre aperto incenſum totum fere deflagrat, flammam, ignemque alit. Idem ſi ſummo egeris, ſed lento gradu aucto igne, ex retorta in excipulum, aquam, ſpiritum, ſalem volatilem acidum, oleum multiplex conficies, facieſque tandem igne maximo, ut tota ſubſtantia

per

per collum retortae transcendat, *ut saepe quidem praestiti*. *Ignis igitur sine aëre*, *vel cum eodem immoto*, *suffocante*, *agens in materiem inflammabilem*, *penitus alia efficit*. Haec cum perpenderem, a summi Viri theoria non nihil recedebam; neque enim aëris immobilitas, aut defectus prohibere posse videbatur, quominus corpora in clauso spatio accenderentur, cum flamma ex iisdem orta, & vasis inclusa, ad tempus aliquod ardere pergat, eoque diutius, quo vasa ampliora fuerint, donec nempe omnis aër in vasis contentus flammae calore fuerit corruptus (27, 28): verosimilius propterea videbatur, exteriorem ignem, interea dum corpora calefacit vasis contenta, conclusum aërem ita pervertere, ut ipsorum inflammationi inservire non posset (36). Cum vero cogitarem specula caustica etiam, quae validissima sunt, calorem omnem in angustum spatium ita colligere, ut ad paucorum pollicum a foco distantiam calor mediocris omnino sit, (*o*) per ipsa corpora vasis inclusa calefieri vehementer posse conjiciebam, quin ambiens aër ex calore corrumperetur, atque adeo eo pacto, & inflammari, & ex inflammatione in partes resolvi debere; neque vanam conjecturam fuisse experimentum comprobavit: cum enim in amplam lagenam vitream recenti aëre plenam carbonem, sulphur, camphoram, successive immisissem, &, accurate obturato lagenae orificio, contenta corpora foco radiorum solarium per causticam lentem (*p*) collectorum exposuissem, ex unoquoque horum corporum fumum erumpentem observavi, & carbonis superficiem pluribus in locis in cinerem redegi, & ex camphora demum, ac sulphure veram flammam excitavi, quibus rite perpensis, extra controversiam positum esse videbatur, igne exterius adhi-

(*o*) Calor in distantia 5. pol. a foco speculi Vilettiani vix est 190. graduum ther. Faranehit. (Boerh. Ch. t. 1. p. 129.) quanto igitur minor erit in eadem distantia a foco speculorum, aut lentium multo debiliorum? quanto minor in majoribus ab iisdem focis distantiis?

(*p*) Lens, qua usus sum, focum habebat ad distantiam semipedis circiter, convexo-convexa, erat quinque transversos digitos latitudine aequabat.

adhibito corpora vasis inclusa inflammari non posse, ex eo, quod interea dum corpora ipsa suscepto paullatim calore ad inflammationem disponuntur, ambiens aër simul calefactus vitietur, & alendae flammae impar efficiatur: Et aërem quidem calore corruptum ipsum esse, qui sulphuris inflammationem in vasis clausis impediat, confirmat Equitis Salutii experimentum, qui cum sulphur in phiala angusti colli contentum, igni impositum non inflammari cerneret, mutato ope follis aëre, flammam emisisse observavit. Postremo pulvis pyrius, qui in corrupto ex calore aëre flammam emittit, is exterius admoto igne etiam accenditur (*q*): in corrupto autem aëre pulverem pyrium flammam emisisse observavi, dum in recipiens, in quo paullo ante flamma sponte extincta fuerat, quemadmodum §. 28. pyrobolum ex eodem confectum, & accensum immisi; nam intra id recipiens tamdiu arsit, quamdiu omnis pulvis consumtus fuisset.

41. At Nobilis Boyleus non solum corpora vasis vitreis inclusa, radiis lentis ope collectis, combuserat; verum etiam pastillo usus fuerat ejus naturae, ut semel accensus in libero aëre totus consumeretur, atque observaverat, ubi semel pastillus hujusmodi vasi inclusus ope lentis accensus fuisset, eo majorem ipsius quantitatem combustam fuisse, quo vas amplius esset, aut aër densior (*); adeo ut pastillus tum demum extinctus fuisse videatur, quando ipsius calore omnis aër in eodem vase conclusus vitiatus fuerat, & igni communi alendo ineptus evaserat.

42. Aër porro factitius e corporibus eductus immissam flammam suffocat, ut Cl. Physici observarunt (*r*), cujus quidem phenomeni ratio ex nostris principiis deduci facile posse videtur; cum enim calore aër pervertatur, ita ut flam-

(*q*) Inter corpora inflammabilia ea tantum, quae nitrata sunt in clauso vase flammam concipere posse Macherus monet Ch. pratiq t. 2. cap. 1. proc. 5.

(*r*) Boyle exper. physico-mech. cont. 2. artic. 5. exp. 3.

(*) Exper. physico-mech. cont. 2. artic. 7. exp. 2. 3.

flammae infensus evadat, cumque aër factitius, vel actuali igne educatur, vel effervescentia, aut putrefactione, quos motus utrosque ingens caloris gradus comitatur, vel demum e corporibus eruatur, quae ignis, calorisque actionem passa fuerunt, (*f*) patet et ipsum alendae flammae imparem esse debere (36).

43. Quod si nostra experimenta cum aliorum experimentis conferre pergamus, videmus Halesium aërem respirando jam ineptum, sola per telam laneam oleo tartari imbutam filtratione, iterum respirationi aptum reddidisse (*t*), cum contra nos aërem sustentandae flammae imparem, ne trajectione quidem per crassum ejusdem liquoris stratum, ad pristinam indolem restituere poterimus (25), quod significare videtur, aliam caussam esse interitus animalium in clauso spatio, aliam extinctionis flammae; hanc ex mutatione ab igne inducta oriri, illum ex admixtis haeterogeneis vaporibus, animali exitialibus, qui a filtris retineri possint: quae quidem sententia Boylei experimento confirmari videtur, qui cum accensam flammam simul cum animali intra recipiens clausisset, flammam cito perire observavit, & interim animal nullum adhuc molestiae indicium praebuisse; adeo ut id vitium, quod aërem flammae sustentandae ineptum reddiderat, nullum animali incommodum afferret (*u*).

44. Equidem inversam propositionem experimento explorans, observavi aërem, intra quem animal perierat, sustentandae flammae ineptum fuisse; cum enim in recipiente eo modo disposito, quo §. 28. passerculus inclusus fuisset, & periisset ex impedito novi aëris accessu, iis symptomatibus, quae a Cl. Viris jamdudum adnotata sunt, obturaculum eduxi, quo lancis foramen obturabatur, &, im-

mersa

(*f*) Vid. suite de recherches sur le fluid. élast. par le Cheval. Saluce.
(*t*) Statiq. des vegetaux. exp. 116.
(*u*) Nova experimenta intra aërem, & flammam vitalem animalium exp. 1., & 2. Et Cl. Lagh. Comment. de Acad. Bonon. tom. 4. p. 88. in opusc., qui tamen observat passerculi mortem ex flammae vaporibus 36. celeriorem fuisse. ibid. p. 81.

merſa accenſa candela in recipientis cavitatem, protinus extingui obſervavi, quod demonſtrat aërem animali alendo ineptum, etiam ineptum fieri alendae flammae; forte quod vitium duplex contrahat ex animalis mora, alterum ab admixtis vaporibus, ex quo animali exitiale fiat, alterum actione pulmonum animalium, quos toties ſubire cogitur, ex quo flammae perniciofus evadat: et duplex quidem id vitium ineſſe videtur in aëre a carbonibus ardentibus, aut candentibus metallis corrupto (*x*), qui non tantum flammae exitialis eſt, ut aër a flamma alia vitiatus, ſed & ipſis animalibus infeſtus deprehenditur.

45. Illud vero quaeri poſſet, num reſpiratus aër flammae exitialis evadat ex eo tantum, quod pulmonum calorem paſſus ſit; num quod intra pulmonem, aut animale corpus ex alia cauſſa id vitium contraxerit. Nam quod ignis, & calor aërem ſuſtentandae flammae imparem reddat (36), id non prohibet, quominus et aliae cauſſae id ipſum facere poſſint. In Phyſicis enim ita comparatum eſt, ut ſi errores vitare velimus, vix ultra experimenta progredi liceat: veruntamen haud leviter novae cauſſae excogitandae, aut admittendae ſunt, ubi jam certa ſuppetat, cum compendioſa natura, una cauſſa, innumeros, ac mire diverſos effectus producere ſoleat. Sequenti igitur experimento quaeſtionem definiendam ſuſcepi. Ranam poculo vitreo, ſupra lancem metallicam (28) glutinato, incluſam, ſuffocavi: vixit autem per tres ferme dies. Una a morte hora lancis foramen aperui, & per ipſum accenſam candelam in poculi cavitatem immiſi: protinus extincta eſt, non ſecus ac in ſuperiori experimento (44) contigiſſet. Cum vero ranae calor vix ullus ſit, tuto concludi poſſe cenſeo, perverſionem aëris ex ſuffocatis animalibus ortam calori minime tribuendam eſſe, ac proinde non una, ſed pluribus de cauſſis nativam

(*x*) Boyle l. c. exp. 2. Hauksbé l. c.

tivam aëris compagem ita vitiari, ut flammae alendae impar evadat: quamobrem nec definire audemus, num simile artificialis aëris vitium soli calori sit adscribendum (42), licet diuturno frigore perinde fuerit emendatum, ac si ex calore productum fuisset (ʒ).

46. Neque solum quando animal demum interiit (44, 45), sed etiam multo ante aërem flammae infestum deprehendi; adeo ut deinceps, non flammam solum, sed et ipsas immissas prunas statim suffocaret. Quoniam vero aër in quo flamma extincta est, prunis non aeque noxius observatur, concludendum videtur, prunas, & animalium vitam (43) a leviori vitio, ex brevi flammae calore inducto, minus affici, dum ex graviori ejusdem speciei vitio, quod aut animalium vita, aut calor diuturnus prunarum induxit, vehementer laedantur. In eam itaque opinionem adductus sum, ut putem, ab exhalantibus vaporibus utique animalia in clauso vase plurimum laedi, sed multo magis a vitio, & perversione ipsius aëris haud absimili illi, quam diuturnus calor inducere potuisset. Profecto, quando experimentum Halesii (43), quo filtrationis ope, aër respirationi diutius aptus servatur, ita ab ingenuo Auctore propositum video, ut nec ipse satis eidem fidere videatur (*a*), multo minus vaporibus tribuendum censeo, quam principio fueram opinatus (43). Huc accedit quod vitium, quo aër ex suffocato animali inficitur, similiter diuturnum esse comperio, ac illud, quod ex extincta flamma nascitur (28). Nam Boyleus aërem, in quo animal ante quatuor horas interierat immisso alteri animali, trium minutorum spatio, mortem attulisse scribit (*b*),

(ʒ) Vid. suite des recherches sur le fluide élast. &c. par le Chev. Saluce.
(*a*) Mais je ne sçai, si cela ne doit pas être attribué a quelque passage insensible que l' air avoit pû se faire à travers les ligatures; je ne me souciai pas même de répéter l'experience, crainte de m' altérer la poitrine en respirant si souvent ces vapeurs nuisibles. Statiq. des veget. exp. 116.
(*b*) Exp. physico-mechan. cont. 2. artic. 3. exp. 11.

quo certe tempore, animalis prius extincti vapores, qui aquosae indolis esse censentur (*c*) condensari, ac colligi debuissent: aër quoque factitius, undecim diebus, postquam e quercu fuerat eductus, vim veneficam retinuerat, qua immissum animal cito suffocavit (*d*): ex quibus erui posse videtur, aërem factitium, aut ex suffocatis prunis, aut animalibus depravatum multo gravius labefactari, ideoque non flammae solum, sed & prunis, & animalibus perniciosum esse; contra, qui flamma vitiatus fuit, flammae quidem nocere; sed, cum levius id vitium sit, quanquam ejusdem speciei, animalia, aut prunas manifeste laedere neutiquam posse. Caeterum, dum mutatae aëris constitutioni animalium in ipso inclusorum mortem tribuendam esse conjicio, minime inficior, collectis quoque vaporibus, animalia ipsa laedi plurimum posse; cum tam perspicua, tam vehemens sit diversorum effluviorum actio in nervosum systema, ut nonnisi temere in dubium revocari possit. Hoc tantum suspicor, vapores ab animalibus emanantes, ipsorum vitae minus, quam mutatam aëris crasim infensos esse. Quid quod flammam, cujus extinctionem in clauso aëre mutatae aëris constitutioni adscribendam probavimus (36), a quibusdam tamen odoratis effluviis laedi Laghius testatur (*e*)?

47. Sed jam forte nimis conjecturis indulsimus: enim vero nobis visum est, propositam quaestionem non prius solvi posse, quam plura in eam rem experimenta tentata fuerint; quorum inspecto eventu, difficultas tandem omnis evanescat. Primo enim definire oporteret, quousque varii alitus ex odoriferis corporibus emanantes, & per interclusum aërem dispersi, flammae in ipsum immersae nocere possint: nocere enim Laghius innuit, quantum vero noceant mi-

(*c*) Haller prim. lin. Physiol. §. 438.
(*d*) Hales apud Desagulierium. Vid. sag. delle transaz. filosof. tom. 4. pag. 61. Vim vero veneficam aëris artificialis ab aliis corporibus educti demonstravit Boyle l. c. art. 5.
(*e*) L. c. pag. 85.

minime proponit; deinde opus esset Halesii experimentum (43) commodiori methodo, qua superius usi fuimus, (25) iterum instituere, omniaque ipsius phaenomena, quae ad hanc rem facere possent diligenter adnotare: postea definire, an vitium, quod ex suffocato animali aër contrahit, quodque, non secus ac vitium ex flamma natum, diuturnum esse innuimus (46), glacie ita emendari possit, quemadmodum id, quod ex flamma provenit (37, 38, 39): experimento demum decernere opus esset, num aër, qui ignis exterius admoti calorem diu passus est, postea refrigeratus (36) immissis animalibus incommodum afferat: experimenta, verbo dicam, omnia in flamma capta, mutato congruenter apparatu, in animalibus instituenda essent. Quandoquidem vero hujusmodi experimenta multum operae, & temporis requirerent, quod nobis in praesentiarum deficit, cum noster hic liber jam sub praelo sit; idcirco in tempus aliud differenda esse statuimus.

DISSERTATIONES,

E T

OPUSCULA VARIA.

MÉMOIRE
DU CHEVALIER SALUCE

Sur la nature du fluide Elaſtique qui ſe dévelope de la Poudre à Canon.

LEs ſentimens de ceux qui ont traité de la Poudre à Canon ſont ſi partagés ; leurs raiſonnemens ſont ſi brillants, & paraiſſent ſi bien apuiés ſur le vrai, qu' il n'eſt pas poſſible au prémier coup d' œil de ſe décider ſur l' eſtime qu' on en doit faire. Le plan que je me propoſe de ſuivre dans une matiére auſſi épineuſe, & ſi peu éclaircie, eſt de procéder le plus méthodiquement qu' il me ſera poſſible à un nombre d' expériences déciſives, dont je donnerai une exacte déſcription, après avoir expoſé en racourci le ſentiment de pluſieurs grands Hommes : des reſultats des expériences, je tâcherai de déduire toutes les conſéquences qui dépendent de l' entiére connaiſſance de la nature du fluide, & de la ſoigneuſe obſervation des phénoménes ; c' eſt par la voie d'un enchainement naturel de faits, que je chercherai de ſatisfaire aux doutes qui partagent les Phyſiciens ; je n' entrerai dans aucune queſtion qui ait rapport à la pratique : pluſieurs célébres Auteurs excités par l' importance, & la difficulté du ſujet y ont éxercé leurs talents. On a pû calculer l' action de ce fluide ſans en connaître la nature, & on a tiré de cette Téorie tous les ſecours, dont la pratique avoit beſoin. C' eſt un bonheur pour les hommes qu' ils puiſſent avec la ſeule connaïſſance des effets naturels, en faire des applications heureuſes aux uſages les plus utiles

à la Société avant d'être assurés des causes qui les produisent.

I. Les opinions sur la cause de la force, & des effets de la Poudre à Canon, se peuvent réduire à deux principales: Mr. le Chevalier Isaac Nevvton (*a*), qu'on peut considérer comme Auteur de la prémiére, pense que la subite & véhémente raréfaction de la matiére qui s'enflame, & s'échaufe très-vivement la convertit en vapeurs, dont l'action violente se manifeste par une explosion & une force prodigieuse; car dit-il le charbon & le souffre qui s'allument aisément, mettent en feu le salpêtre, dont l'ésprit converti en fumée détonne avec violence. Les vapeurs qui provienent du volatil du souffre ne contribuent pas peu à en acraitre la force. Mr. Wolff, & plusieurs autres Auteurs pensaient de même (*b*).

2. La seconde opinion est, que, lorsque la Poudre prend feu il se dévelope un fluide, dont l'élasticité était auparavant fixée, & qui gardait la forme d'un corps solide.

3. Quoique ce principe soit adopté par plusieurs illustres Auteurs, Mrs. Boyle (*c*), Papin (*d*), Jean Bernoulli (*e*), de la Hire (*f*), Belidor &c., tous ne con-

(*a*) Pulvis tormentarius, quum ignem concipit, abit in fumum flammantem. Carbo nimirum, & sulphur ignem concipiunt facillime nitrumque accendunt; nitrique spiritus inde in vaporem rarefactus, proruit cum explosione; similiter ac aquae vapor ex aeolipila. Sulphur quoque, ut est volatile, convertit se itidem in vaporem; id quod explosionem illam adauget . . . . Explosio itaque pulveris tormentarii oritur ex celeri ac violenta actione, qua tota permixtio subito, & vehementer calefacta, rarefit utique, vel convertit se in fumum sive vaporem: qui denique vapor actionis istius violentia eodem tempore candefactus, flammae nimirum speciem exhibet. Quaest. x. post. opt. pag. 139. 140.

(*b*) Musch. Phys. tom. 1. pag. 432.

(*c*) Op. var. pag. 36.

(*d*) Trans. phil.

(*e*) Op. om. tom. 1. Diss. de efferv. & ferm. pag. 34.

(*f*) Diss. de l'an. 1702.

conviennent pas ſur la nature & ſur la maniére dont ce fluide agit. Quelques uns, comme Mr. Halles (*g*) ont conclus, par la reſſemblance de ce fluide avec celui qu' ils avaient tiré d' autres corps ſolides par la diſtillation, ou autres procédés, qu' il était du véritable air, ſans qu' ils ſe ſoient cependant attachés à en faire une analiſe particuliére, telle, que parait l'éxiger la délicateſſe & l' importance du Sujet.

4. Mr. Muſchembroek (*h*), dont l' habileté dans les expériences eſt univerſellement reconnue, révoque en doute que le fluide élaſtique des corps ſoit du véritable air, & fait pluſieurs objections au ſentiment de Mr. Halles: & il a tâché même par pluſieurs raiſons de démontrer que ce n' était point en effet du véritable air.

5. L' autorité des grands Hommes que je viens de citer, ne ſervant qu' à augmenter mon incertitude ſur la nature de ce fluide, j'ai eu recours, comme je me l'étais propoſé, aux expériences, unique reſſource pour démêler le vrai, & terminer les differens.

6. Je démontre par leur ſecours, en prémier lieu, l' inſufiſance de la prémiére opinion; je fais enſuite une ſcrupuleuſe analiſe du fluide, en obſervant à peu près la méthode qu' a tenu Mr. Halles (*i*) pour en éxaminer d' autres; je réponds en troiſiéme lieu aux objections de Mr. Muſchembroek, en aportant les raiſons que l' expérience m' a fournies.

7. Je me flatte par ce procédé de fournir des nouvelles lumiéres ſur la Téorie Phyſique de la Poudre, & d' avoir par un cours naturel & ſimple donné la ſolution d' autres queſtions, ſçavoir de la maniére, avec laquelle la Poudre prend feu dans le vuide, & des effets qui en réſultent; En

(*g*) Stat. des veg. trad. par Mr. de Buffon pag. 164. & ſuiv., & 369.
(*h*) Coll. Acad. tom. 1. add. 38.
(*i*) Stat. des veg. pag. 166.

8. En prémier lieu perſonne n' ignore que les vapeurs aqueuſes perdent leur élaſticité, & ſe convertiſſent en eau en refroidiſſant. Je prouverai donc, dans la ſuite, que le fluide élaſtique de la Poudre ne perd que peu de ſon élaſticité, (*) & que par conſéquent il ne ſaurait être produit par des vapeurs aqueuſes.

9. Mr. Halles informé des expériences de Mrs. Boyle, Papin, Bernoulli &c., & connaiſſant (*K*) d' ailleurs la grande quantité d'air que contient le ſalpêtre, & eu égard aux raiſons ci-devant citées ne balance point à croire que ce ne ſoit du véritable air. Cette conjécture cependant eſt combattue ainſi que je l'ai dit par les raiſons ſuivantes de Mr. Muſchembroek.

I. Que ce fluide n' eſt point propre à la reſpiration;

II. Qu' il n' entretient point le feu.

10. Mr. Halles (*l*) ſoupçonne, que ces effets ſoient produits par le mélange des exhalaiſons ſulfureuſes, puiſqu'il a démontré qu'elles abſorbent l'air, & qu'elles nuiſent à la reſpiration; en preuve de quoi, il compare (*m*) ſes réſultats avec ceux de Mr. Hauksbee: pour m' en convaincre, je n' ai pas héſité de tenter la ſéparation des exhalaiſons ſulfureuſes, & faire enſuite la comparaiſon entre les propriétés du fluide qui en ſerait purgé, & celui qui les contiendrait encore; C' eſt pourquoi j' ai fait les expériences ſuivantes.

11. Prémiérement pour m' aſſurer que ce fluide nuit aux animaux.

EXPE-

(*) J' ai dit que le fluide élaſtique de la Poudre perd un peu de ſon élaſticité, parceque vraiment dans l' expér. que j' en ai fait, il eſt arrivé quelque changement à la hauteur du mercure, j' aurois cependant lieu de douter que l' atmoſphére ait pu y contribuer, c' eſt pourquoi je me reſerve à la répliquer avec plus de diligence.

(*K*) Voïés ſtat. des veg. pag. 159.

(*l*) Ibid. pag. 163.

(*m*) Ibid. pag. 197.

EXPERIENCE PREMIERE.

JE mis ſous un récipient [a] en forme de bouteille placé ſur la Pompe Pneumatique, une Caille: de l' embouchure [b] du récipient ſortait un tube de verre, à l'extrémité [c] du quel était un petit flacon où j'avois mis de la Poudre, je lutai fortement toutes les jointures, je pompai enſuite par deux éxantlations une partie de l' air, après leſquelles je fis placer un flambeau, dont la flamme répondait éxactement à l' endroit [d] où était la Poudre dans le flacon: je continuai aprés cela à pomper l'air juſqu' à ce que l' animal donna des marques aſſurées qu'il alloit toucher à ſa fin, terme précis où la Poudre devait s'enflammer, & que j' avais trouvé après pluſieurs repriſes, en effet elle prit feu, & le fluide paſſant dans le récipient étouffa l' animal; il eſt donc prouvé que le fluide élaſtique de la Poudre eſt pernicieux & mortel. Fig. 1. pl. pr.

12. Les phénoménes que j' ai obſervé dans cette occaſion ſont les ſuivans;

I. Qu' une flamme lente & bleuatre ſe manifeſte lorſque la poudre commence à entrer en fuſion;

II. Que lorſqu' elle s' embraſe totalement elle ne fait point de bruit, & ſe convertit en une nuée opaque.

Les difficultés que j' ai rencontré dans l' éxécution de cette expérience, m' ayant obligé de la repéter bien des fois, j' ai eu occaſion de remarquer les précautions qu' il y faut apporter, je ne parlerai que des principales, pour épargner de peine à ceux qui ſe donneront celle de la répliquer.

I. Le flacon doit être bien ſec, car ſans cela il ſe fend dans le tems que la poudre prend feu; pour remédier à cet inconvénient, j' ai coutume de l' expoſer petit à petit à un feu plus violent; & je l' y tiens pendant long tems, ayant ſoin pour prévenir la fuſion, de le changer de ſituation.

2. La

II. La Poudre doit être pilée finement, parceque la propagation du feu étant interrompue dans le vuide, les grains ainſi diviſés en parties fort petites ſont plus contigus, & le feu s'y met plus aiſément tout à la fois, lorſqu'ils ſont échauffés.

III. La plus grande facilité de s'enflammer que la Poudre pilée a dans l'air libre, & la perte de force qu'elle parait ſouffrir par cette opération, (à ce qu'on peut juger par le faible détonnement qu'elle fait) m'ont déterminé à en mettre une plus grande quantité dans le flacon; en effet l'événement a très-bien confirmé mon attente, & on peut en mettre davantage ſans riſquer de briſer les vaiſſeaux, ce qui eſt d'autant plus utile dans cette expérience, où il faut un aſſés grande quantité de fluide, ſans qu'il ſoit poſſible de faire un grand vuide à cauſe que l'animal périrait.

Cet effet ſurviendrait-il peut-être parceque la viteſſe, avec laquelle l'air recouvre ſon élaſticité trouvant moins de réſiſtance, à cauſe que les parties n'adhérent plus entr'elles par un ſi fort contact, la force en ſerait amoindrie?

13. Cette façon de mettre le feu à la poudre en échauffant le verre me parait la plus propre, & la plus ſimple, outre les avantages qu'elle a d'être plus active, & d'en allumer une plus grande quantité, parce qu'elle peut embraſſer une ſurface plus étendue.

Ce qui n'arrive pas en ſe ſervant d'un miroir, ou d'un verre ardent, puiſque par ce moyen on n'embraſe que les grains, ſur leſquels tombent les rayons, car il faut remarquer ainſi que je l'ai dit en paſſant ſeulement (II.) que la Poudre dans le vuide ne s'embraſe qu'après qu'une forte chaleur l'a mis en fuſion; le miroir, ou verre ardent ne produit cet effet qu'aux peu de grains qu'il affecte; & l'application d'un fer rouge ſous le diſque de la platine de la Pompe, eſt une maniére trop pénible, qui a en

partie

partie le désagrément ci-devant indiqué, & qui plus eſt, elle ne peut convenir dans des expériences auſſi délicates.

14. Par ce qui a été dit on voit clairement en prémier lieu, que, ce n'eſt qu'en vertu de la réſiſtance de l'air extérieur que la Poudre détonne, puiſque dans un air fort rare, l'exploſion ſe fait ſans détonnement.

En ſecond lieu, que l'air qui ſe trouve dans les intervales de la Poudre grainée ſert à la propagation du feu, car l'on ſait, comme je l'ai dit, (13) qu'en ſe ſervant du miroir &c., ou du fer rouge l'on ne peut enflammer toute la Poudre, & ſi la communication du feu n'était point interdite l'inflammation de peu de grains devrait ſuffire pour mettre le reſte en feu, & c'eſt auſſi pour cette raiſon que je la fais piler, comme je l'ai fait obſerver, précaut. II.

15. La conjécture de Mr. Halles ne me paraiſſait pas moins fondée après l'expérience que je venais de faire, & dans l'intention de mettre fin à toute controverſe, je commençai par reflèchir ſur la nature de chaque individu, afin de me former du fluide l'idée la plus juſte, & ayant conſidéré que le ſalpêtre contient un alkali fixe & un acide volatil, que le ſouffre eſt compoſé d'un acide, d'une matiére huileuſe & inflammable, que le charbon enfin contient une grande quantité de phlogiſtique; j'imaginai que le fluide ſerait conſtitué par des parties omogénes à celles des ſubſtances primitives, & en conſéquence de ce jugement, je m'attachai à tenter la ſéparation des exhalaiſons pernicieuſes par une voye chimique.

16. Perſuadé donc que ce fluide contiendrait eſſentiellement des parties acides vitrioliques & nitreuſes, & une grande quantité de matiéres groſſiéres, (15) j'eus recours à une ſubſtance alkaline qui retenant par une grande affinité les prémiéres, interdiraient à l'aide des filtres le paſſage aux autres, & pour m'en convaincre je fis l'expérience ſuivante.

EXPERIENCE SECONDE.

Fig. 1. pl. pr. JE fis à l'apareil de la prémiére expérience la variation seule du tube, qui sert de communication du récipient au flacon : j'en employais un fait en plusieurs piéces (*r r r r*) qui entraient l'une dans l'autre : chacune de celles, qui s'emboitaient avoit un double filtre de gaze bien enduit d'huile, ou de sel tartre ; celui qui entrait dans le récipient était ou triple, ou bien d'une toile plus serrée. Les jonctions furent soigneusement lutées, & je procédai ensuite de la même maniére, que dans la prémiére expérience. La Caille par son abatement & ses contorsions, ménaçait une fin prochaine. Le baromêtre était à 20. pouces environ, lorsque la poudre s'alluma ; l'animal aussitôt prit sensiblement de nouvelles forces, loin de démeurer couché sur son ventre les yeux mourants, il se leva promptement, enfin il donna des marques non équivoques de l'alternative qu'il venait d'essuyer. Le baromêtre dans ce moment baissa de 10. pouces environ ; les exhalaisons denses & noires ne passerent point au delà du prémier filtre : ayant répliqué cette expérience sans changer les filtres à cause de la grande quantité d'huile de tartre, dont je les avais enduits, j'en eus les mêmes résultats : j'ai trouvé après avoir ôté les filtres que le plus proche du flacon contenait une espéce de calcination en assés grande quantité, dans celui qui suivait un sel cristallisé, au troisiéme un peu du même sel, dans le dernier enfin je ne pû rien apperçevoir de sensible.

17. Le sel qui se trouve dans le second & troisiéme filtre suivant le jugement que j'avais formé (16), devait contenir un espéce de nitre regénéré, car l'on sait (*n*) que de l'inflammation du souffre combiné avec le salpêtre, il s'éléve.

(*n*) Voy. Macquer. el. de Chim. prat. pag. 60.

s' éléve des vapeurs, dont l'odeur est mélée d'un esprit sulfureux & d'esprit de nitre, & si on les rassemble, on trouve effectivement que la liqueur est un mélange d'acide nitreux, d'acide de souffre & d'esprit sulfureux, ce qui étant combiné avec l'alkali du tartre, doit donner un composé de nitre regéneré & de tartre vitriolé, j'en ai mis sur un charbon en feu, & j'ai observé qu'il petillait, & fusait sensiblement, ce qui a servi à me confirmer dans mon idée; faute d'une quantité suffisante de ce sel, je n'ai pu l'assujettir à d'autres éxamens.

18. Cette expérience comparée avec la précédente fait connaître que les exhalaisons infectées dont le prémier fluide n'était pas purgé, sont celles qui on fait périr l'animal, ce qui étant aussi arrivé à Mr. Muschembroek lui a donné lieu de douter que les fluides élastiques soient du véritable air.

19. J'ai emploié le même artifice pour observer si le fluide ainsi purgé perd une aussi grande partie de son élasticité qu'en a perdu celui que Mr Hauksbee avait gardé, ce qui devait servir à établir avec plus de fondement l'issue de mes recherches, quoique d'ailleurs Mr. Halles ait (*o*) vu qu'en distillant le salpêtre à travers l'eau, l'air qui s'en dévelopait conservait son élasticité, ce qui n'arrivait pas sans cette précaution, car alors ses résultats aprochaient de ceux de Mr. Hauksbee.

EXPERIENCE TROISIEME.

UN robinet qui passait à travers la platine, & communiquait avec le récipient était soigneusement luté à la partie supérieure (*o*) du tube d'un baromêtre, qui en cette occasion ne touchait point au mercure, mais il était Fig. 2. pl. pr.

(*o*) Stat. des veg. pag. 168.

était recourbé en forme de ſiphon : le reſte de l'apareil était conforme à celui de l'expérience ſeconde. Je fis le vuide, & le mercure ſe trouvait environ à 27. pouces de hauteur, lorſque la Poudre prit feu ; les oſcillations du mercure étant ceſſées, enſorte qu'on le voyait 10. à 12. pouces plus bas, je fermai le robinet, & je marquai avec un petit fil de ſoye ciré le point où répondait la ſurface ſupérieure adhérante aux parois du tube, j'ai laiſſé enſuite pendant long tems cet apareil ſans que j'aie aperçu de changement bien ſenſible à la hauteur du mercure, &c. par conſéquent à l'élaſticité du fluide, de ſorte que j'ai lieu de croire que ces petites variations aient été cauſées par celles de l'atmoſphére, ou ſi elles dépendaient encore du fluide, c'eſt peut être, parceque je ne l'ai pas aſſés purgé des exhalaiſons vicieuſes ; car au lieu d'enduire les filtres d'huile, j'aurais pû mettre du ſel de tartre qui les aurait retenu plus ſûrément & en plus grande quantité ; je ſuis d'autant plus porté à le conjéc̃turer que les différences furent de peu de conſéquence, tandis que Mr. Hauksbee (*p*) a trouvé que le fluide qu'il avait gardé dix-huit jours perdit en ce tems $\frac{19}{20}$ de ſon élaſticité une ſeule 20.^{me} reſtant conſtante.

20. Par la comparaiſon des expériences de Mr. Hauksbee, & de Mr. Halles, il eſt d'autant plus plauſible de conclure que le fluide élaſtique de la Poudre perd une grande partie de ſon élaſticité à cauſe des exhalaiſons ſulfureuſes, & des vapeurs acides ; car Mr. Halles démontre que les exhalaiſons, & les vapeurs de cette nature fixent, ou abſorbent une quantité déterminée d'air, & que le reſte ne ſouffre plus d'altération, ce qui eſt préciſément conforme à l'iſſue qu'ont eu les expériences de Mr. Hauksbée, que j'ai cité ci-devant, *expér.* 3.

EXPE-

(*p*) Expér. Phiſ. mec. pag. 83.

EXPERIENCE QUATRIEME.

LE peu d'altération que, j'obſervai dans l'élaſticité du fluide me détermina à profiter de cet apareil pour examiner un autre caractére du véritable air, il s'agiſſait d'obſerver dans quelle raiſon il ſe comprimerait, & par l'infuſion que je fis de nouveau mercure dans la jambe recourbée, je trouvai qu'il ſe comprime à peu près de même que l'air commun en raiſon des poids. Fig. 2. pl. pr.

21. Mr. Muſchembroek n'ayant point parlé de l'élaſticité du fluide, & ayant remarqué ſeulement pour ainſi dire en paſſant la différence des raiſons de compreſſion entre ce fluide & l'air comun, je me ne ſuis pas trop attaché & n'ai pas pris toutes les précautions néceſſaires pour décider inconteſtablement ces deux points; il eſt cependant bon de ſavoir que Mr. Halles (*q*) ayant comprimé de ces airs factices a trouvé auſſi qu'ils ſuivent la loi de l'air comun.

22. La ſeconde objection de notre illuſtre Auteur ne peut qu'embaraſſer très-fort un Phyſicien par la grande difficulté qu'on rencontrerait dans l'arrangement d'une expérience qui ne laiſſa plus rien à déſirer d'autant plus qu'il a laiſſé ignorer celles, par leſquelles il a trouvé que le fluide élaſtique éteint la flamme; elle n'eſt cependant pas à mon avis auſſi ſolide, que l'autre, quoiqu'elle préſente au premier coup d'œil quelque choſe de plus frappant, qui parait décider la queſtion; l'altération que la chaleur violente cauſe à cette propriété de l'air, lors même qu'il eſt comun & naturel, nous tire de l'admiration où nous pourrions être en voyant dans le fluide élaſtique de la Poudre tous les caractéres de l'air comun, excepté celui-ci; l'on ſait que l'air

en

(*q*) Stat. des veg. pag. 164. & 369.

en paſſant par la flamme, ou autour des corps que l'on a fait fortement échaufer ne ſçaurait plus être propre non ſeulement à entretenir un autre flamme, mais auſſi à nourrir quelque feu que ce ſoit (*r*).

24. Delà il pourrait très-bien reſulter que l'air nouvellement développé de la Poudre, quoique rendu à ſon prémier état d'air comun, (en le purgeant des parties qui altéraient ſi fort ſes propriétés qu'on avoit lieu de douter avec quelque fondement de ſa véritable nature) cet air dis-je ſe dégageant des obſtacles qu'il n'aurait pu ſurmonter ſans le ſecours du feu, qui lui fait recouvrer ſubitement ſon élaſticité, peut être ne peut-il aquérir ce caractére, de même que l'air échaufé dans un récipient ſans rien perdre de ſa gravité ſpécifique, de ſon élaſticité &c. eſt cependant privé entiérement de cette vertu.

25. Après tout ce que nous venous de dire, il paraît qu'il n'y a plus aucun lieu de douter de la nature du fluide élaſtique de la Poudre; l'air par conſéquent eſt le grand mobile des effets ſurprenans, que nous voyons, & le violent reſſort, qui agit ſi puiſſamment, en vertu des particules ignées qui le mettent en action: de ſorte que l'air contenu dans chaque grain fait le principe virtuel de la force, celui qui ſe trouve dans les intervales des grains ſert de véhicule à l'inflammation, & l'extérieur cauſe le détonnement par la colliſion & l'impulſion que ſouffrent ſes particules de celles qui ſe développent avec une viteſſe prodigieuſe à l'inflammation de la Poudre.

26. Puiſqu'après avoir analiſé le fluide élaſtique en queſtion il eſt démontré en conſéquence que l'opinion des Auteurs cités (1) quelque ingénieuſe & brillante qu'elle ſoit, n'eſt pas confirmée par l'expérience, il eſt tems d'examiner les ſentimens de ceux dont j'ai parlé (2) pour en déméler

(*r*) Com. pag.

mêler les circonſtances qui font naître les différences entr' eux ſur la maniére, avec laquelle ils font agir l'air, qu' il reconnaiſſent tous comme la cauſe des effets de la Poudre, ſans qu' ils en aient aſſuré la vérité par des expériences.

I. Mr. Jean Bernoulli (*s*) prétend, que le feu met en action l' air condenſé dans chaque grain.

II. Mr. de la Hire (*t*) ajoute que non ſeulement l'air des grains eſt mis en agitation par le feu, mais auſſi celui qui ſe trouve dans les interſtices.

III. Mr. Belidor enfin généraliſe l' opinion, & ne met point de reſtriction à l' action de l' air, d' où l' on peut inférer qu' il comprend auſſi l' air extérieur.

27. Par ce qui a été dit on doit former le jugement ſuivant.

I. Que Mr. Bernoulli par ſon avis n'aſſigne que la ſource du fluide qui fait l' activité intrinſéque de la Poudre, ſans que tous ſes effets ordinaires ſoient compris en effet ſous l' idée qu' il avait de l' action de l' air, car il n' aurait pu combiner par ce ſeul ſecours le détonnement & la propagation du feu avec l' exploſion.

II. Mr. de la Hire a quelque avantage ſur Mr. Bernoulli, puiſqu' il pourrait indiquer la propagation du feu, cependant ſon opinion eſt encore imparfaite.

III. Mr. de Belidor n' ayant ſpécifié aucune eſpéce d' air, enſorte, qu' il n' entre point à déterminer l' action particuliére qu'elle éxerce à chaque phénoméne, a donné un explication conforme à la vérité de la cauſe générale des effets ordinaires, qui n' eſt en ce cas que la combinaiſon des trois différentes propriétés, avec leſquelles l'air influë ſur les phénoménes mentionnés.

28. Il

(*s*.) Op. om. tom. pag. 34.
(*t*) Diff. an. 1702.

28. Il ſera moins difficile à préſent d'avoir avec plus de préciſion pluſieurs des connuës néceſſaires aux Mathématiciens pour reſoudre tous les Problêmes balliſtiques, & les autres de cette nature, puiſqu'en ſe ſervant des mêmes artifices, dont j'ai uſé, il ne s'agira plus que d'obſerver les différences des réſultats cauſées par les altérations apportées au fluide. Les expériences n'en ſeront ſans contredit pas moins délicates: l'utilité réelle qu'on y trouvera, ſera celle d'avoir une baze conſtante, dont on a déja bien des notions aſſurées, vu que pluſieurs de ſes propriétés caractériſtiques ſont ſoumiſes à des loix immuables, qui ſont ſous l'empire du Calcul: quoique ces données ayent été priſes juſqu'à préſent, (de l'aveu de Mr. Euler dans ſes notes à Mr. Robins) plutôt hipotétiquement à cauſe des grandes difficultés que l'on rencontre, cependant bien des ſavans ſe ſervant des obſervations plus aprochantes du vrai, ont répandu de grandes lumiéres ſur ce ſujet, non ſeulement par la réſolution de pluſieurs Problêmes, mais encore par les méthodes qu'ils ont fourni pour reſoudre les autres Problêmes poſſibles.

29. Mr. Nevvton eſt le prémier qui aie recherché la courbe que trace un corps pouſſé par la force de la Poudre en ſupoſant la réſiſtence de l'air proportionelle aux quarrés des viteſſes, & aprés bien des ſoins il l'a déterminée par aproximation. Mr. Jean Bernoulli en donna enſuite une ſolution plus ample & plus éxacte. Mr. Beniamin Robins après avoir trouvé que la viteſſe, avec laquelle l'air ſe précipite dans le vuide eſt moindre que celle, avec laquelle ſe meut un projectile pouſſé par la force de la Poudre, a déterminé la réſiſtence de l'air preſque en raiſon des cubes, & Mr. D'Alembert rapportant ce principe dans ſon excellent ouvrage ſur la réſiſtence des fluides lui fait une ingénieuſe application du Calcul; Mr. Euler enfin a donné dans ſes notes à Mr. Robins &

dans

dans une Dissertation particuliére, (u) tout ce que l'on peut trouver de plus complet à présent: il y a même ajouté des méthodes, & des formules pour resoudre les cas possibles. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail sur ces sortes d'applications, une telle digression étant tout à fait étrangére au sujet que je me suis proposé.

(u) Mém. de l'Ac. R. des Sc. de Berlin tom. 6.

RECHERCHES
SUR LA METHODE
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. LES Géométres ſavent depuis long-tems, que lorſque la premiére différentielle d'une variable quelconque diſparoit ſans que la ſeconde diſparoiſſe en même tems, elle devient toujours un *maximum*, ou un *minimum*; & en particulier elle eſt un *maximum*, ſi ſa différentielle ſeconde eſt négative, & un *minimum*, ſi cette différentielle eſt poſitive. Si la différentielle ſeconde diſparoit en même tems que la premiére, alors la quantité n'eſt ni un *maximum*, ni un *minimum*, à moins que la troiſiéme différentielle ne diſparoiſſe de même, dans lequel cas la propoſée deviendra un *maximum*, ſi la différentielle quatriéme ſera négative, & un *minimum*, ſi elle eſt poſitive, & ainſi de ſuite. En général, pour qu'une quantité ſoit un *maximum*, ou un *minimum*, il faut que les ordres ſucceſſifs des différentielles, qui s'évanouiſſent enſemble, ſoient en nombre impair, & alors elle eſt ſûrement un *maximum*, ou un *minimum*, ſelon que la différentielle qui ſuit la dernière évanouiſſante ſe trouve négative, ou poſitive. Voyez Maclaurin, traité des fluxions p. 238. & 857.

2. Tout ceci ſuppoſé & bien entendu, que Z repréſente une fonction algébrique des variables t, u, x, y, &c., & qu'on ſe propoſe de la rendre un *maximum*, ou un *minimum*. Soit ſelon les regles ordinaires

dZ

$dZ = pdt + qdu + rdx + \int dy +$ &c., & l'on aura d'abord cette équation $pdt + qdu + rdx + \int dy +$ &c. $= 0$. Mais comme la relation entre t, u, x, &c. eſt encore indéterminée, de même que celle de leurs différentielles dt, du, dx &c., & que d'ailleurs l'équation donnée doit être vraie quel que ſoit leur rapport; il eſt évident que pour les chaſſer tout à fait de l'équation, il faut égaler ſéparément à zero chaque membre pdt, qdu, rdx &c., d'où l'on tire autant d'équations particuliéres qu'il y a de variables ſavoir $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ &c. Par le moien de toutes ces équations on trouvera les valeurs de chaque inconnue, t, u, x &c. qui ſubſtituées dans la fonction propoſée Z la rendront un *maximum*, ou un *minimum*.

3. Paſſons maintenant à l'examen de la ſeconde différentielle. En ſuppoſant, ce qui eſt permis, les premiéres différentielles dt, du, dx &c. conſtantes, l'on aura $d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + d\int dy +$ &c.

Soit $dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$

$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$

$dr = Ddt + Edu + Fdx + Idy$

$d\int = Gdt + Hdu + Idx + Ldy$

ce qui donnera

$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2 + 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2$.

Pour commencer par le cas le plus ſimple ſuppoſons qu'il n'y ait qu'une ſeule variable t, de ſorte que $d^2Z = Adt^2$; on voit d'abord que, puiſque dt^2 eſt toujours poſitif, la différentielle d^2Z doit avoir le même ſigne que la quantité A; donc ſi A eſt poſitif Z ſera un *minimum*, & ſi A eſt négatif il ſera un *maximum*; ſi $A = 0$ on ſuivra les regles données §. 1.

4. Les variables contenues dans Z soient deux, savoir t & u; alors $d^2Z = Adt^2 + 2Bdtu + Cdu^2$. Il paroit au premier aspect bien difficile de connoître si cette expression d^2Z doit être positive, ou négative, sans qu'on ait le rapport de dt à du, qui n'est pas donné; car puisqu'en changeant ce rapport la fonction d^2Z doit aussi varier, il semble indubitable qu'elle pourra aussi passer du positif au négatif, & du négatif au positif, pendant que les quantités A, B, C restent les mêmes. Qu'on donne cependant à la proposée $Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$ cette forme $A(dt + \frac{Bdu}{A})^2 + (C - \frac{B^2}{A})du^2$; & on verra que, comme les quarrés $(dt + \frac{Bdu}{A})^2$, & du^2 ont toujours le même signe $+$, toute la quantité sera nécessairement positive si les deux coéficiens A & $C - \frac{B^2}{A}$ sont positifs, & au contraire elle deviendra négative, lorsque ceux-ci seront tous deux négatifs, quel que soit le rapport de dt à du. On aura donc pour le cas du *minimum* $A > 0$ $C - \frac{B^2}{A} > 0$ savoir $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$ ce qui donne de même $C > 0$; à moins donc que les quantités A, B, C n'aient ces conditions $A > 0$, $C > 0$, & $AC > B^2$ la proposée Z ne pourra pas être un *minimum*. En second lieu on trouvera pour le *maximum* $A < 0$ $C - \frac{B^2}{A} < 0$ savoir $C < \frac{B^2}{A}$, $CA > B^2$, puisque A est négatif; ce qui donne encore $C < 0$; donc les conditions pour le *maximum* seront en partie les mêmes, & en partie précisément contraires à celles du *minimum*.

5. Si

5. Si A ou C, ou toutes deux ſont $= 0$ ſans que B le ſoit auſſi, la condition de $AC > B^2$ ne pourra pas ſubſiſter, ainſi la quantité propoſée ne deviendra jamais un vrai *maximum*, ou *minimum*; la même choſe arrivera toutes les fois que A, & C ſeront de ſigne contraire; car puiſque B^2 eſt toujours poſitif la condition de $AC > B^2$ devient impoſſible. Si B s'évanouiſſoit encore en même tems que A, ou C; $d^2 Z$ ſe trouveroit réduite au cas d'une ſeule variable, & par conſéquent pourroit être de nouveau un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un, ni l'autre, ſelon ce qu'on a dit pour le premier cas. Enfin ſi la quantité $d^2 Z$ étoit toute $= 0$, ſavoir $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, il faudroit recourir à la différentielle troiſiéme; que ſi celle-ci ſe trouve n'être pas égale à zero, la quantité Z ne peut être ni un *maximum*, ni un *minimum*; & au contraire ſi elle évanouit en même tems que la ſeconde on cherchera tout de ſuite la quatriéme; & ſi elle n'eſt pas évanouiſſante il ſera facile par la méthode dont nous nous ſommes ſervi ci-devant de connoître ſi elle eſt poſitive, ou négative, ce qui déterminera de nouveau le *maximum*, ou le *minimum*.

6. Lorſque les variables ſont trois, ſavoir t, u, x la différentielle $d^2 Z$ prend cette forme $d^2 Z = A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2 + 2D\,dt\,dx + 2E\,du\,dx + F\,dx^2$ qu'on réduira d'abord à

$$A\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2$$

$$+ 2\left(E - \frac{BD}{A^2}\right)du\,dx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right)dx^2$$

Soit poſé $C - \frac{B^2}{A} = a$, $E - \frac{BD}{A^2} = b$, $F - \frac{D^2}{A} = c$, & on aura $d^2 Z = A\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2 + a\,du^2 + 2b\,du\,dx + c\,dx^2$; qu'on opére à préſent

ſur

ſur ces trois derniers membres, comme on a fait ci-deſſus §. 4., & toute la différentielle propoſée $d^2 Z$ deviendra $A\,(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A})^2 + a\,(du + \frac{b\,dx}{a})^2 +$ $(c - \frac{b^2}{a})\,dx^2$; or les quarrés $(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A})^2$, $(du + \frac{b\,dx}{a})^2$, & dx^2 étant toujours poſitifs, toute la différentielle ſera de même poſitive ſi les coéficiens A, a, & $c - \frac{b^2}{a}$ ont chacun le ſigne $+$; on a donc pour le *minimum* les conditions ſuivantes $A > 0$, $a > 0$, $ca > b^2$, ou en remettent au lieu de a, b, c, leurs valeurs, $A > 0$; $C - \frac{B^2}{A} > 0$, $(C - \frac{B^2}{A}) \times (F - \frac{D^2}{A}) > (E - \frac{BD}{A})^2$ ſavoir $A > 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$, d'où il réſulte encore $C > 0$, $F > 0$, & $FA > D^2$. On trouvera par les mêmes principes pour le *maximum* $A < 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2)$ $(FA - D^2) > (EA - BD)^2$, & par conſéquent $C < 0$, $F < 0$, & $FA > D^2$.

7. Si les quantités A, & C évanouiſſent ſeules, ou toutes deux, ou une ſimplement, la ſeconde condition devient impoſſible; ſi c'eſt F qui s'évanouit, alors la troiſiéme devient impoſſible; car $(CA - B^2) \times - D$ qui eſt néceſſairement négatif, à cauſe de $CA > B^2$ doit toujours ſe trouver moindre de $(EA - BD)^2$, d'où il ſuit que Z ne ſauroit être un *maximum*, ou un *minimum*, ſi A, C, D priſes ſéparément, ou enſemble comme on voudra ſont égales à zero. Si par l'évanouiſſement des termes la différentielle $d^2 Z$ ſe reduiſoit à deux variables, ou à une ſeulement, elle tomberoit dans le ſecond cas, ou dans le premier, & on devroit ſuivre les regles données §. 3., & *ſuiv.* Enfin ſi toute la $d^2 Z$ ſe trouvoit égale à zero, &

que

que la différentielle troisiéme ne soit pas de même égale à zero, on feroit sur que la proposée Z ne pourroit jamais devenir ni un *maximum*, ni un *minimum*; & quand cette différentielle troisiéme évanouiroit avec la seconde, par des transformations semblables à celles que nous avons pratiquées, on pourroit dans la quatriéme différentielle distinguer les cas du *minimum*, & du *maximum*, & ceux qui sont inutiles.

8. On peut étendre la même théorie aux fonctions de quatre, ou plus variables. Quiconque aura bien saisi l'esprit des réductions que j'ai employées jusqu'ici, pourra sans peine découvrir celles qui conviendront à chaque cas particulier. Au reste pour ne pas se méprendre dans ces recherches, il faut remarquer que les transformées pourroient bien venir différentes de celles que nous avons données; mais en examinant la chose de plus-près on trouvera infailliblement que quelles qu'elles soient, elles pourront toujours se réduire à celles-ci, ou au moins y être comprises.

9. Comme je crois cette théorie entiérement nouvelle, il ne sera peut-être pas inutile d'ajouter les réflexions suivantes. Quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction proposée Z; si on les regarde chacune en particulier, & qu'on cherche le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient pendant que toutes les autres demeurent les mêmes, on trouvera à part les premiéres différentielles $p\,dt$, $q\,du$, $r\,dx$ &c., dont chacune étant égalée à zero, nous donneroit les mêmes équations que ci-dessus, $p = 0$, $q = 0$, $r =$ &c. §. 2. De la même maniére passant aux différentielles secondes, ont trouveroit celles-ci séparément $A\,dt^2$, $C\,du^2$, $F\,dx^2$, $L\,dy^2$ &c., & par conséquent si A, C, F, L &c. sont toutes positives, ou négatives, on pourroit croire que cela suffit pour que les valeurs de t, u, x &c. tirées des équations $p = 0$,

$q = o$ *&c.* rendent néceſſairement la propoſée Z un *minimum*, ou un *maximum*. Il eſt vrai en effet que par rapport à chacune de ces variables conſidérées à part la quantité donnée Z devra toujours être la plus grande, ou la plus petite; mais eſt-il certain que ce qui vaut pour chacune priſe ſéparément doive auſſi valoir pour toutes enſemble? Examinons la choſe plus intimément.

10. Que la propoſée Z contienne les ſeules variables t & u, & on pourra la regarder comme l'ordonnée à une ſurface, dont t & u ſont les deux autres; donc la queſtion dans ce cas ſe reduit à trouver la plus grande, ou la plus petite ordonné d'une ſurface, dont l'équation eſt donnée, ſavoir $dZ = p\,dt + q\,du$. Si l'on fait u conſtant, elle ſe reduit d'abord à $dZ = p\,dt$, & dans ce cas elle exprime toutes les ſections de la même ſuperficie paralléles à l'axe des t, à meſure que la quantité u reçoit des valeurs différentes. Soit donc poſé $p = o$, & on aura §. 2. une valeur de t qui donnera la plus grande, ou la plus petite ordonnée Z dans chacune de ces ſections paralléles; mais puiſque u eſt conſtant, ſi l'on différentie de nouveau la dZ on a $d^2 Z = A\,dt^2$, & par conſéquent on jugera du *maximum*, ou *minimum* par la ſeule valeur de A, après y avoir cependant ſubſtitué à la place de t la valeur que fournit l'équation $P = o$. Savoir ſi A ſe trouve poſitive, ou négative quelle que ſoit la valeur d'u, ou bien ſi en changeant u, elle peut auſſi changer de ſigne, on conclura dans le premier cas que toutes les dites ſections ont un *maximum*, ou un *minimum*, & dans le ſecond qu'elles ont entre certaines limites un *maximum*, entre d'autres un *minimum*. Si A eſt $= o$, quelle que ſoit la valeur de la conſtante u, alors aucune des dites ſections n'aura ni un *maximum*, ni un *minimum*. Mais ſi A devient ſeulement $= o$, lorſque u a de certaines valeurs données, dans ces cas ſeulement les ſections corre-

reſpon-

reſpondantes ſeront deſtituées du *maximum*, ou du *minimum*. Le lieu de toutes ces ordonnées qui ſont un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l' un ni l' autre ſera contenu dans l' équation $p = o$, en aiant égard à la ſeule variabilité de u, elle formeront donc dans la même ſuperficie une ſection qui ſera à ſimple, ou à double courbure, & qui ſera déterminée par les deux équations conjointes $dZ = p\,dt + q\,du$ & $p = o$, ou $dZ = q\,du$ & $p = o$. On voit par là, que pour trouver le *maximum*, ou le *minimum* de la ſurface entiére, il faudra chercher la plus grande, ou la plus petite ordonnée qui convient à cette même ſection; on aura donc de nouveau $q = o$, ce qui donnera la valeur de l'autre variable u.

11. Paſſons maintenant à la différentielle de q; elle a été d' abord ſuppoſée $= B\,dt + C\,du$ §. 3.; mais puiſque dans ce cas t eſt déterminé par u dans l'équation $p = o$, ou bien dans ſa différentielle $A\,dt + B\,du = o$, dt eſt $= -\frac{B\,du}{A}$, ce qui rend $dq = (-\frac{B^2}{A} + C)\,du$; il reſulte donc que ſi $-\frac{B^2}{A} + C$ eſt poſitif, ſavoir ſi $C > \frac{B^2}{A}$, l' ordonnée ſera la moindre; ſi $C < \frac{B^2}{A}$ elle ſera la plus grande, & ſi $C = \frac{B^2}{A}$ elle ne ſera ni l'une, ni l'autre, à moins que les conditions réquiſes dans les différentielles des genres plus élevés ne ſoient remplies. Or en reflechiſſant ſur ces *maximum* & *minimum*, il ſera aiſé de comprendre que l'ordonnée Z ne pourra pas être un *maximum* entre toutes les autres, à moins qu'elle ne ſoit la plus grande de toutes celles qui ſont contenues dans la ſection determinée par $dZ = q\,du$, & de plus que toutes les ordonnées qui compoſent cette même ſection ne ſoient encore elles mêmes des *maximum* dans les ſections

parallèles correspondantes. §. 10. On prouvera de même que la quantité Z ne sauroit être absolument un *minimum* sans qu'elle soit de même un *minimum* dans la section qui contient tous les *minimum*. Car dans tous les autres cas l'ordonnée seroit ou la plus grande, ou la plus petite d'entre celles qui ne sont ni les plus grandes, ni les plus petites, ou bien entre les plus grandes, ou les plus petites, elle ne seroit ni la plus grande, ni la plus petite, ou enfin elle seroit la plus grande d'entre les plus petites, ou au contraire, ce qui ne donne pas un vrai *maximum*, ou *minimum* comme on cherche. De tout ceci je conclus donc qu'après avoir tiré des équations $p = 0$, $q = 0$, les valeurs de t & u, & les avoir substituées dans A, & dans $C - \frac{B^2}{A}$ il faut pour que Z soit un vrai *maximum*, que A soit négatif, & $C < \frac{B^2}{A}$, savoir $CA > B^2$; & au contraire si Z doit être un vrai *minimum* on doit trouver A positif, & $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$, conformément à la théorie générale expliquée §. 4., & *suiv.*

12. Si au lieu de considérer d'abord u constant & t variable, on avoit fait u variable & t constant, on seroit parvenu aux déterminations suivantes $C < 0$, & $AC > B^2$, pour le *maximum* $C > 0$, & $AC > B^2$, pour le *minimum* ce qui revient au même. Au reste cette méthode que nous venons d'employer pour découvrir les conditions des *maximum* & *minimum* dans les fonctions à deux seules changeantes, est également applicable à toutes les autres fonctions plus composées, elle a même l'avantage d'être plus analitique, & plus directe que la premiére, c'est pourquoi je tâcherai ici de la développer dans toute sa généralité.

13. Soient les variables contenues dans Z en tel nombre qu'on voudra ; je ne considére d'abord qu'une variable seule, & je tire par la différentiation l'équation pour le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient; puis en passant à la différentielle seconde, je trouve les conditions qui déterminent la proposée à être un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre. Après cette premiére opération je substitue dans Z, ou dans ses différentielles simplement la valeur de la premiére variable trouvée, & je procéde sur un autre variable de la même maniére; ensuite mettant de nouveau dans la fonction proposée Z la valeur qu'on aura trouvée pour cette seconde variable, on passera à l'examen d'une troisiéme variable; & ainsi de suite &c. Soit t la premiére variable qu'on veut considérer dans Z, & on aura $dZ = p\,dt$; & $d^2Z = A\,dt^2$; d'où $p = 0$, & $A > 0$ pour le *minimum*; $A < 0$ pour le *maximum* §. 1. Que t & u, soient à présent toutes deux variables, il en résultera $dZ = p\,dt + q\,du$ qui à cause de $p = 0$ se reduit à $dZ = q\,du$, d'où l'on tire $d^2Z = (B\,dt + C\,du)\,du$; mais puisque $p = 0$; dp le sera aussi, & par conséquent $A\,dt + B\,du = 0$; ce qui donne $dt = -\frac{B\,du}{A}$; cette valeur substituée dans d^2Z la changera en $d^2Z = (-\frac{B^2}{A} + C)\,du^2$, j'aurois donc $q = 0$; & $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ pour le *minimum*, & $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ pour le *maximum*, savoir, puisque A est positif dans le premier cas, & négatif dans le second, en multipliant par A, il résultera toujours la même condition de $AC > B^2$. Si outre les deux précédentes il y a encore une troisiéme variable x à considérer, je cherche la valeur de dZ eu égard à ces trois variables t, u, x, & je trouve $dZ = p\,dt +$

$q\,d\,u + r\,d\,x$ ce, qui à cauſe de $p = 0$, $q = 0$ ſe change en $d\,Z = r\,d\,x$; donc la différentielle ſeconde $d^2 Z$ ſera $= (D\,d\,t + E\,d\,u + F\,d\,x)\,d\,x$. A préſent par le moyen des équations $p = 0$, $q = 0$, ou bien de leurs différentielles $A\,d\,t + B\,d\,u + D\,d\,x = 0$, & $B\,d\,t + C\,d\,u + E\,d\,x = 0$ je cherche des valeurs de $d\,t$ & $d\,u$ en $d\,x$, & je trouve

$d\,t = \frac{BE - CD}{AC - B^2}\,d\,x$; $d\,u = \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,d\,x$ je les ſubſtitue dans l'expreſſion de $d^2 Z$; ce qui me donne.

$d^2 Z = (\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F)\,d\,x^2$ Il réſulte donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum*: $r = 0$; enſuite

$\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F > 0$ pour le *minimum*, & < 0 pour le *maximum*, ou bien en ôtant le dénominateur $AC - B^2$ qui eſt toujours poſitif, on a $2\,BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 + ACF > 0$ pour le *minimum*, & < 0 pour le *maximum*. Soit multipliée cette expreſſion par A qui eſt poſitif dans le premier cas, & négatif dans le ſecond, & on aura

$2\,ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0$ ſoit pour le *maximum*, ſoit pour le *minimum*, ſavoir $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$. On ſuivra le même procédé pour un plus grand nombre de variables.

14. Cette méthode étant générale pour quelque nombre de variables que ce ſoit, ne ſera pas bornée au ſeules fonctions algébriques, mais pourra encore s'étendre avec ſuccès aux *maximum* & *minimum* qui ſont d'un genre plus élevé, & qui appartiennent à des formules intégrales indéfinies. Je me reſerve de traiter ce ſujet que je crois d'ailleurs entiérement nouveau dans un ouvrage particulier que je prépare ſur cette matiére; & dans lequel après

avoir

avoir exposé la méthode générale, & analitique pour résoudre tous les problêmes touchant ces sortes de *maximum*, ou *minimum* j'en déduirai, par le Principe de la moindre quantité d'Action, toute la Mécanique des corps soit solides, soit fluides.

15. Je finirai ce mémoire par quelques exemples des plus simples qui éclaircissent la théorie qu'on vient d'établir. Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élastiques, & rangés en ligne droite sans se toucher; supposons que le premier vienne choquer le second avec une vitesse donnée c, le second avec la vitesse acquise du premier choque le troisiéme, & ainsi de suite, les masses du premier & du dernier étant données, on demande celles des corps intermédiaires, afin que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible. Soit a la masse du premier, & b celle du dernier; soient ensuite t, u, x, y *&c.* les masses intermédiaires inconnues; par les loix du choc on trouvera la vitesse comuniquée par le premier corps a au second $t = \frac{2ac}{a+t}$, celle que donne celui-ci au troisiéme $u = \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$ & ainsi de suite; donc la vitesse que reçevra le dernier b sera exprimée par $\frac{2catuxy \ldots\ldots\ldots\ldots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots\ldots\ldots}$ expression qui doit devenir un *maximum*. Pour en trouver plus aisément la différentielle, qu'on la suppose $= Z$, & prenant les logarithmes d'une part, & de l'autre on trouvera $l\,2ca + lt + lu + lx + ly +$ &c. $- l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) -$ &c. $= lZ$ ce qui donne par la différentiation $\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} +$ &c. $- \frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} -$ &c. $= \frac{dZ}{Z}$; d'où en mettant ensemble, & reduisant au même dénominateur

les termes affectés des mêmes différentielles l'on tire $dZ = \frac{Z(au-t^2)dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx-u^2)du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy-x^2)dx}{x(u+x)(x+y)} + \&c.$ On aura donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum* les équations suivantes $au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$ &c. qui donnent les analogies $a:t = t:u$, $t:u = u:x$, $u:x = x:y$ &c., savoir $\div a:t:u:x:y: \ldots \ldots b$; d'où l'on voit que toutes les masses doivent constituer une progression géométrique, dont les deux extrémes sont les données a & b. Pour juger à présent du *maximum*, ou *minimum* soit fait d'abord pour abréger $\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha$; $\frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta$; $\frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma$ &c. on aura $p = \alpha(au - t^2)$; $q = \beta(tx - u^2)$; $r = \gamma(uy - x^2)$ &c. donc $dp = (au - t^2)\,d\alpha + \alpha(a\,du - 2t\,dt)$; $dq = (tx - u^2)\,d\beta + \beta(x\,dt + t\,dx - 2u\,du)$; $dr = (uy - x^2)\,d\gamma + \gamma(y\,dx + u\,dy - 2x\,dx)$ &c. Or comme les termes a, t, u, x, y &c. doivent être en progression continue si l'on nomme $1:m$ la raison constante d'un antécédent quelconque à son conséquent on trouve $t = ma$, $u = m^2 a$, $x = m^3 a$, $y = m^4 a$, &c.; de plus $\beta = \frac{\alpha}{m^3}$, $\gamma = \frac{\alpha}{m^6}$ &c., lesquelles valeurs substituées dans les expressions précédentes les reduiront à $dp = \alpha a(du - 2m\,dt)$; $dq = \alpha a\left(dt - \frac{2\,du}{m} + \frac{dx}{m^2}\right)$; $dr = \alpha a\left(\frac{du}{m^2} - \frac{2\,dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4}\right)$; & ainsi des autres. On aura donc $A = -2m\alpha a$; $B = \alpha a$; $C = -\frac{2\alpha a}{m}$; $D = 0$; $E = \frac{\alpha a}{m^2}$; $F = -\frac{2\alpha a}{m^3}$; $G = 0$; $H = 0$; $I = \frac{\alpha a}{m^4}$ &c.

On

On voit par là en premier lieu que A eſt négatif, & que par conſéquent la propoſée doit être un *maximum* ſi les autres conditions ſe trouvent remplies. Or $AC = 4\alpha^2 a^2$, & $B^2 = \alpha^2 a^2$ donc 1mo $AC > B^2$; $AC - B^2 = 3\alpha^2 a^2$ $FA - D^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}$; $EA - BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m}$, donc

$$(AC - B^2)\times(FA - D^2) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}, \text{ \& } (EA - BD)^2$$

$= \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2}$, & par conſéquent 2do $(AC - B^2)\times(FA - D^2) > (EA - BD)^2$. S'il n'y a que deux maſſes intermédiaires t & u, il ſuffit d'avoir égard à la premiére de ces conditions, s'il y en a trois il faut encore conſidérer la ſeconde; s'il y en avoit pluſieurs autres il faudroit avoir recours à autant de conditions qu'il y a de variables. Au reſte dans ce problême on les trouvera toutes remplies; ſi on veut bien prendre la peine de pouſſer plus loin le calcul; de ſorte qu'on peut franchement aſſûrer, que lorſque les maſſes intermédiaires quel que ſoit leur nombre ſont telles qu'elles forment une progreſſion géométrique entre les deux extrémes données, la viteſſe que reçoit la derniére par leur moyen eſt toujours la plus grande poſſible. Ce problême a été traité par Mr. Huguens le premier, & depuis par beaucoup d'autres Géométres; mais ſans avoir aucunement égard aux nouvelles déterminations, que nous avons cependant trouvées néceſſaires pour s'aſſûrer de l'exiſtence du *maximum*, ou *minimum*.

16. Soit l'équation générale pour les ſurfaces de ſecond ordre $z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$, qu'on ſe propoſe de trouver le point où l'ordonnée z eſt la plus grande, ou la plus petite; on aura en différentiant $2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy$ ce qui fournit d'abord les deux équations ſuivantes $ax + by = \frac{e}{2}$; $cy + bx = \frac{f}{2}$, d'où l'on tire

$x =$

$x = \frac{ec - fb}{2(ac - b^2)}$; $y = \frac{eb - fa}{2(ac - b^2)}$. Différentions de nouveau la différentielle trouvée, & on aura, puisque $dz = 0$, $2z\,d^2z = 2a\,dx^2 + 4b\,dx\,dy + 2c\,dy^2$ où les quantités x, y ne se trouvent plus. Or afin que l'ordonnée z soit un vrai *maximum*, ou *minimum*, il faut que a & c soient toutes deux négatives dans le premier cas, & toutes deux positives dans le second, de plus il faut encore que $ca > b^2$, car sans cela les valeurs trouvées pour les ordonnées x & y ne donneroient jamais ni un *maximum*, ni un *minimum*; en effet toutes les fois que ca n'est pas plus grand que b^2; le célébre Mr. Euler a demontré par une autre voie dans l'appendice à l'introduction à l'Analise des infiniment petits, que la surface proposée s'étend à l'infini, & qu'elle a une assimptôte conique. Il paroit donc clairement que la méthode pour determiner les *maximum* & *minimum*, quand il y a plusieurs variables en ne les regardant qu'une à la fois, peut souvent être très-fautive. Car par exemple dans le cas précédent, en traitant d'abord x comme variable, on trouve la différentielle premiére $2(ax + by - \frac{e}{2})dx$, & la seconde $2a\,dx^2$; de même en faisant varier y on a pour la différentielle premiére $2(cy + bx - \frac{f}{2})dy$, & pour la seconde $2c\,dy^2$. Or les deux différentielles premiéres posées $=$ à zero donnent les mêmes équations qu'on a trouvé, & les deux secondes font voir que si a & c sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives l'ordonnée z est un *maximum*, ou un *minimum*, si on a simplement égard à la variabilité des x & y considérées séparément; mais on n'est pas en droit de conclure pour cela que z soit un *maximum*, ou un *minimum*, par rapport à toutes deux ensemble, comme on vient de le voir.

Sur

Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites recurrentes

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. SOIT proposée l'équation différentielle $dy + yXdx = Zdx$, ou X & Z expriment des fonctions quelconques de la variable x; l'on sait que pour intégrer cette équation, il suffit de faire $y = uz$, ce qui donne $udz + zdu + uzXdx = Zdx$, où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de u, ou de z. Supposons donc $zdu + uzXdx = 0$, & divisant par z, l'on aura $du + uXdx = 0$, & par conséquent $\frac{du}{u} = -Xdx$, & $lu = -\int Xdx$, savoir $u = e^{-\int Xdx}$, ou e est le nombre, dont le logarithme hyperbolique est 1. Par cette supposition la proposée deviendra $udz = Zdx$, ce qui donne $dz = \frac{Zdx}{u}$; $z = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, & enfin $y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$.

2. En observant le procédé de cette méthode, on verra aisément qu'elle doit pouvoir s'appliquer encore avec succès aux équations différentielles qui ont la même forme que la précédente, quoique les différences soient supposées finies. Soit donc l'équation $dy + My = N$, dont la différentielle dy soit finie, & les autres quantités M & N soient des fonctions d'une autre variable quelconque x. Supposons en premier lieu $y = uz$, & l'on aura dans ce cas $dy = udz + zdu + dudz$, & l'équation se changera en $udz + zdu + dudz + Muz = N$. Qu'on pose comme ci-dessus les deux termes

mes $z\,du + Muz = 0$, & on aura $du + Mu = 0$, ſavoir $\frac{du}{u} = -M$; pour reſoudre cette équation dans notre cas où la différentielle du n'eſt pas infiniment petite, qu'on ſuppoſe $u = e^t$, & l'on aura $u + du = e^{t+dt}$; & $du = e^t(e^{dt} - 1)$; d'où $\frac{du}{u} = e^{dt} - 1 = -M$; $e^{dt} = 1 - M$, & prenant les logarithmes $dt = l(1 - M)$, & enſuite intégrant $t = \int l(1 - M)$; mais l'on ſait que la ſomme des logarithmes de pluſieurs nombres eſt égale au logarithme du produit de tous ces nombres; donc ſi l'on exprime généralement par $\pi.(1 - M)$ le produit continuel de toutes les quantités contenues dans la formule $1 - M$, on aura $t = l\pi.(1 - M)$, & par conſéquent $u = e^t = \pi.(1 - M)$. Par l'évanouiſſement de ces deux termes l'équation devient $u\,dz + du\,dz = N$, d'où l'on tire $dz = \frac{N}{u + du}$, & en intégrant $z = \int \frac{N}{u + du}$. Mais ayant déja trouvé $u = \pi.(1 - M)$; ſi l'on exprime par M^1 le terme conſécutif à M on aura $u + du = \pi.(1 - M^1)$, & par conſéquent $z = \int \frac{N}{\pi.(1 - M^1)}$; & puiſque $y = zu$, $y = \pi.(1 - M) \times (\int \frac{N}{\pi.[1 - M^1]})$, ou bien en ajoutant à cette intégration une conſtante quelconque A; $y = \pi.(1 - M) \times (A + \int \frac{N}{\pi.[1 - M^1]})$.

3. Soit à préſent propoſée l'équation $y^1 = Ry + T$, ou y^1 eſt le terme qui ſuit y dans la ſuite des y; puiſque $y^1 = y + dy$ elle ſe reduira à $dy + (1 - R) \times y = T$. Qu'on faſſe donc $1 - R = M$; $T = N$, & l'on trouvera pour la valeur de y l'expreſſion ſuivante $ly = \pi.R.(A + \int \frac{T}{\pi.R})$. Si R eſt une quantité conſtante,

ſtante, il eſt clair que $\pi. R$ & $\pi. R^2$ deviennent des puiſſances de R, donc l'expoſant eſt égal au nombre qui dénote la place des termes y, & y^1 dans la ſuite des y; ſoit donc m ce nombre, de ſorte que y^m ſoit le même que y, & on aura $y^m = R^m \left(A + \int \frac{T}{R^{m+1}} \right)$. Si T eſt conſtant $\int \frac{T}{R^{m+1}}$ eſt $= T \int \frac{1}{R^{m+1}}$, où les termes exprimés par $\frac{1}{R^{m+1}}$ forment une progreſſion géométrique, dont il ſera aiſé d'avoir la ſomme; ſoit cette ſomme qui commence par $\frac{1}{R} = S$, ſavoir que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} +$ &c. $+ \frac{1}{R^m} = S$, & on aura, en multipliant par R, $1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} +$ &c. $+ \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}$ de cette égalité l'on tirera $S = \frac{R^m - 1}{R^m [R - 1]}$, par conſéquent $y^m = R^m \left(A + T \frac{R^m - 1}{R^m [R - 1]} \right)$, ou bien $y^m = A R^m + T. \frac{R^m - 1}{R - 1}$.

4. Pour ſe convaincre que cette valeur de y ſatisfait entiérement aux conditions de l'équation donnée $y^1 = Ry + S$, ou bien $y^{m+1} = Ry^m + S$, on n'a qu'à multiplier la formule trouvée pour y^m par R, & lui ajouter la quantité T, & l'on trouvera le réſultat $A R^{m+1} + T. \frac{R^{m+1} - R}{R - 1} + T$ qui ſe réduit à $A R^{m+1} + T. \frac{R^{m+1} - 1}{R - 1}$ qui eſt la valeur que la formule générale nous donne pour le terme y^{m+1}.

5. Après avoir trouvé la méthode d'intégrer toute équation différentielle à différences finies, compriſe ſous la

forme générale $dy + My = N$, l' on pourra de même procéder à l' intégration des autres qui dépendent de celle-ci. Or Mr. D'Alembert dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin a fait voir, que toutes les équations différentielles, telles que

$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{B\,d^2y}{dx^2} + \frac{C\,d^3y}{dx^3} + \&c. = X$ où A, B, C &c. sont des constantes quelconques, & où X est une fonction quelconque de x, se réduisent à une équation de cette forme $z + \frac{H\,dz}{dx} = V$, ou H est une constante, & V une fonction de x; laquelle équation est la même que nous avons appris à intégrer dans le cas même des différences finies. Si donc le procédé de Mr. D'Alembert peut avoir lieu aussi quand les différences sont finies, l'on pourra intégrer encore dans cette circonstance tout équation différentielle de cette forme $y + A\,dy + B\,d^2y + C\,d^3y + \&c. = X$, & par conséquent l' équation $y^{\text{I}} + Py^{\text{II}} + Qy^{\text{III}} + \&c. = X$, qu' on peut regarder comme la formule générale des suites récurrentes. La méthode de Mr. D'Alembert se trouve détaillée dans le second tome du Calcul intégral de Mr. Bougainville; mais pour épargner de peine aux Lecteurs je tâcherai de la développer ici en peu de mots. Qu' on suppose $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ &c., & l' équation proposée se changera en $y + Ap + Bq + \frac{C\,dq}{dx} = X$. Qu'on multiplie à présent chacune des équations qu' on a supposé par des coéficiens indéterminés a, b, c &c., & qu' on les ajoute toutes à celle-ci; on aura $y + (A + a)p + (B + b)q - \frac{a\,dy}{dx} - \frac{b\,dp}{dx} + \frac{C\,dq}{dx} = X$. Soit fait ensorte que la

pre-

premiére partie du premier membre de cette équation devienne un multiple exact de l'intégral de la feconde, favoir que $dy + (A+a)\,dp + (B+b)\,dq = dy + \frac{b\,dp}{a} - \frac{C\,dq}{a}$, & en comparant terme à terme il en refultera $A+a = \frac{b}{a}$; $B+b = -\frac{C}{a}$; de ces deux équations l'on tire $b = -\frac{C}{a} - B = aA + a^2$, & $a^3 + Aa^2 + aB + C = 0$, dont les racines donneront trois valeurs d'a qui fatisfairont également aux conditions requifes. Suppofons maintenant $y + (A+a)\,p + (B+b)\,q = z$, l'équation trouvée deviendra $z - \frac{a\,dz}{dx} = X$, laquelle comparée avec celle du §. 1. donnera en intégrant $z = e^{x:a} \int \frac{X}{a\,e^{x:a}}$. Or comme la quantité a peut avoir trois valeurs differentes, nommons les a^{I}, a^{II}, a^{III}, & exprimons par Z^{I} la valeur de z qui contient a^{I}, par Z^{II} celui qui contient a^{II}, & par Z^{III} celui qui contient a^{III}; on aura donc les trois équations fuivantes;

$$y + (A+a^{I})\,p + (B+b^{I})\,q = Z^{I}$$
$$y + (A+a^{II})\,p + (B+b^{II})\,q = Z^{II}$$
$$y + (A+a^{III})\,p + (B+b^{III})\,q = Z^{III}.$$

De ces trois équations on tirera la valeur de y, laquelle à caufe des quantités conftantes A, B, a^{I}, a^{II} &c. fe réduira à cette forme $y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III}$, où F, G, H font des conftantes, dont la valeur dépend des autres A, B, a^{I}, a^{II} &c.

6. Si l'on examine le procédé de cette méthode il paroitra clairement que fi l'équation eut contenu beaucoup plus de termes, par exemple qu'elle eut été

$$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{B\,d^2y}{dx^2} + \frac{C\,d^3y}{dx^3} + \frac{D\,d^4y}{dx^4} + \frac{E\,d^5y}{dx^5} + \&c = X + \&c.$$

l' on auroit trouvé de même $y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V}$, où les quantités Z^{I}, Z^{II}, &c. sont des fonctions de X & x, telles que

$Z = e^{x:a} \int \frac{-X}{a e^{x:a}}$, en posant pour a les racines a^{I}, a^{II} a^{III}, a^{IV}, a^{V} de cette équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$; de plus l'on s'appercevra que les opérations que requiert cette méthode peuvent également se faire, soit que les différences soient finies, ou qu' elles soient infiniment petites.

7. Ayant donc l'équation à différences finies $y + Ady + Bd^2y + Cd^3y + Dd^4y + Ed^5y = X$, & posant $dy = p$, $dp = q$, $dq = r$, $dr = \int$, l' on parviendra de la même maniére à une équation telle que $z - adz = X$, où $z = y + (A + a)p + (B + b)q + (C + c)r + (D + d)\int$, & la quantité a dépendra de cette équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, dont les racines ont été deja supposées a^{I}, a^{II} a^{III}, a^{IV}, a^{V}. Que l' on compare à présent l' équation $z - adz = X$, avec celle du §. 2., savoir $dy + My = N$, & on aura $M = -\frac{1}{a}$; $N = -\frac{X}{a}$; par conséquent $1 - M = \frac{1 + a}{a}$, ce qui donne enfin $z = \pi.\left(\frac{1 + a}{a}\right) \times \left[const. + \int \frac{-X}{a} : \pi.\left(\frac{1 + a}{a}\right)\right]$, ou bien puisque a est constant $z^m = \left(\frac{1 + a}{a}\right)^m . \left(const. - \int \frac{Xa^m}{[1 + a]^{m+1}}\right)$; m exprimant comme ci-dessus le quantiéme du terme z dans la série des z. Si l' on fait de plus X constant on aura en prenant la somme de la progression géométrique exprimée par $\int \frac{a^m}{[1 + a]^{m+1}}$; $z^m = \left(\frac{1 + a}{a}\right)^m \times \left(const. - X. \frac{(1 + a)^m - a^m}{[1 + a]^m}\right)$.

Or comme a peut avoir les valeurs a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V} il est clair

clair qu'en ſubſtituant chacune d'elles dans la formule trouvée, il en réſultera autant de valeurs de z^m qui ſatisferont toutes également. Soient donc toutes ces valeurs exprimées par $Z^I, Z^{II}, Z^{III}, Z^{IV}, Z^V$, & puiſque $z = y + (A+a)p + (B+b)q + (C+c)r + (D+d)ſ$, l'on tirera par le moyen des cinq équations $z = Z^I$, $z = Z^{II}$, $z = Z^{III}$, $z = Z^{IV}$, $z = Z^V$, l'expreſſion ſuivante de y, ſavoir $y = FZ^I + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^V$.

8. Soit enfin propoſée l'équation $y^I + Ay^{II} + By^{III} + Cy^{IV} + \&c. = X$, où y^I, y^{II}, y^{III} &c. expriment des termes conſécutifs de la ſuite des y; il eſt d'abord évident que, puiſque $y^{II} = y^I + dy^I$; $y^{III} = y^I + 2\,dy^I + d^2y^I$, & ainſi des autres, cette équation peut être ramenée à la forme de celle que nous venons d'examiner; mais puiſque le Calcul devient de cette façon trop long, il ſera utile de la reſoudre directement par les mêmes principes que nous avons employés juſqu'ici. De plus afin de pouvoir plus aiſément appliquer cette équation aux ſéries récurrantes, il ſera mieux de conſidérer les termes y^I, y^{II}, y^{III} &c. dans un ordre renverſé, ſavoir que $y^{II} + dy^{II} = y^I$; $y^{III} + dy^{III} = y^{II}$, & ainſi des autres, de ſorte que les expoſans I, II, III &c. dénotent la diſtance de chaque terme au dernier y^I. Suppoſons $y^{II} = p^I$, & l'on aura $y^{III} = p^{II}$, ſoit donc de nouveau $p^{II} = q^I$ & $p^{III} = q^{II}$; ſoit encore $q^{II} = r^I$ & $q^{III} = r^{II} = ſ^I$, & l'on aura $y^{II} = p^I$; $y^{III} = q^I$; $y^{IV} = r^I$; $y^V = ſ^I$, $y^{VI} = ſ^{II}$; ſubſtituant ces valeurs dans la propoſée, elle deviendra $y^I + Ap^I + Bq^I + Cr^I + Dſ^I + Eſ^{II} = X$. Qu'on réduiſe à préſent les ſuppoſitions précédentes en équations, ſavoir $p^I - y^{II} = 0$; $q^I - p^{II} = 0$; $r^I - q^{II} = 0$; $ſ^I - r^{II} = 0$, & après les avoir multipliées par les coéficiens indéterminés a, b, c &c. qu'on les ajoute toutes à celle qu'on vient de trouver. Il en ré-

ſultera

sultera la suivante $y^{I} + (A + a) p^{I} + (B + b) q^{I} + (C + c) r^{I} + (D + d) s^{I} - a y^{II} - b p^{II} - c q^{II} - d r^{II} + E s^{II} = X$. Qu'on fasse maintenant que chaque coéficient de la premiére partie soit multiple de la même maniére de son correspondant dans la seconde, & l'on parviendra aux mêmes équations qu'on a trouvé §. 6., & la quantité a sera déterminée par l'équation $a^5 + A a^4 + B a^3 + C a^2 + D a + E = 0$, dont on a supposé les racines a^{I}, a^{II}, a^{III} &c. Donc si l'on fait $y^{I} + (A + a) p^{I} + (B + b) q^{I} + (C + c) r^{I} + (D + d) s^{I} = z^{I}$ l'équation se reduira à $z^{I} - a z^{II} = X$, qui par une intégration semblable à celle du §. 3. donnera

$z^m = a^m \left(const. + \int \frac{X}{a^{m+1}} \right)$, où m exprimera le quantiéme du terme z^m dans la suite des z. Or comme pour a l'on peut substituer chacune des cinq racines a^{I}, a^{II}, a^{III} &c. de l'équation $a^5 + A a^4 +$ &c. $= 0$, l'on aura de même cinq valeurs différentes de z^m que nous exprimerons comme ci-dessus par Z^{I}, Z^{II}, Z^{III} &c.; donc à cause que $z^m = y^m + (A + a) p^m + (B + b) q^m + (C + c) r^m + (D + d) s^m$, l'on parviendra en chassant les lettres p^m, q^m &c. à la formule $y^m = F Z^{I} + G Z^{II} + H Z^{III} + I Z^{IV} + K Z^{V}$, où F, G, H &c. sont des constantes qu'on doit puis déterminer par la comparaison d'autant de termes donnés dans la suite des y.

9. Si X est constant, par ce qu'on a démontré §. 4. la somme exprimée par $\int \frac{X}{a^{m+1}}$ deviendra $= X \frac{a^m - 1}{a^m [a - 1]}$; & nommant L la constante ajoutée à cette intégration, on aura finalement $Z = L a^m + X \frac{a^m - 1}{a^m [a - 1]}$, d'où l'on tirera par conséquent les autres valeurs Z^{I}, Z^{II}, Z^{III} &c. en substituant à la place de a ses valeurs a^{I}, a^{II}, a^{III} &c.

10. De

10. De tout ceci l'on peut déduire le théorème général ſuivant; ſi l'on a l'équation
$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5}$ $+$ &c. $= X$, où les expoſans des y dénotent leurs places; que l'on cherche toutes les racines $a^{I}, a^{II}, a^{III}\ a^{IV}$ &c. de l'équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$; & l'on aura généralement

$$y^m = Fa^{Im}\,(L + \int\frac{X}{a^{Im+1}}) + Ga^{IIm}\,(L + \int\frac{X}{a^{IIm+1}}) +$$
$$Ha^{IIIm}\,(L + \int\frac{L}{a^{IIIm+1}}) + Ia^{IVm}\,(L + \int\frac{X}{a^{IVm+1}}) +$$
$$K\,a^{Vm}\,(L + \int\frac{X}{a^{Vm+1}}) + \text{\&c.}$$

& dans le cas, où X eſt conſtant.

$$y^m = L\,(Fa^{Im} + Ga^{IIm} + Ha^{IIIm} + Ia^{IVm} + Ka^{Vm} + \text{\&c.})$$
$$+ X\,(F\,\frac{a^{Im}-1}{a^{I}-1} + G\,\frac{a^{IIm}-1}{a^{II}-1} + H\,\frac{a^{IIIm}-1}{a^{III}-1} +$$
$$I\frac{a^{IVm}-1}{a^{IV}-1} + K\frac{a^{Vm}-1}{a^{V}-1} + \text{\&c.}).$$ Si $X = 0$ l'on pourra ſupprimer la conſtante L, & on aura plus ſimplement
$y^m = Fa^{Im} + Ga^{IIm} + Ha^{IIIm} + Ia^{IVm} + Ka^{Vm}$ &c.
formule connuë pour l'expreſſion du terme général de la ſuite des y, telle que
$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5} +$ &c. $= 0$;
ce qui n'eſt autre choſe qu'une ſuite récurrente, dont l'échelle de rélation eſt $-A - B - C - D - E -$ &c.

11. Voila donc la théorie des ſuites récurrentes réduite au calcul différentiel, & établie de cette façon ſur des Principes directs & naturels au lieu que juſqu'ici elle n'a été traitée que par de voies tout-à-fait indirectes. De plus les recherches qu'on a fait ſur cette matiére, ont toujours été bornées au cas de $X = 0$; & perſonne que je ſache n'a jamais entrepris d'examiner généralement les autres cas, où X eſt conſtant, ou même variable, ce qui

peut néanmoins être de la derniére importance pour la réſolution de pluſieurs problêmes qui conduiſent à de telles équations, dont la doctrine des hazards eſt principalement remplie, comme je me propoſe de le faire voir une autre fois, en appliquant à cette eſpéce de calcul la théorie que je viens d' expliquer.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De Analogia Magnetiſmi, & Electricitatis

DISSERTATIO.

MAgnetica phaenomena ad electrica pertinere etiam ante inventam electricitatis theoriam ingenioſi Viri conjectarunt, quod utrimque attractionis motus, & repulſionis obſervarent, atque adeo analogia ducti ex eodem fluido excitari arbitrarentur, quod in electricis quidem in ſenſus incurreret, in magneticis autem occulte actionem ſuam exerceret: quae porro opinio, etſi ab aliis, iiſque Clariſſimis Viris impugnata fuerit, nuper tamen per immortalia electrica inventa reſtituta eſt, ac illuſtrata. Cum in eam rem meditarer, nonnulla occurrebant, quae ut analogiam magnètici, & electrici fluidi confirmare, ita identitatem dubiam reddere poſſe videbantur, quae quamquam obvia ſunt, cum tamen magna ex parte hactenus non ſint animadverſa paullo fuſius exponenda eſſe duxi.

1. Corpora inaequaliter electrica ſe attrahunt, aequaliter ſe repellunt, eodem modo poli magnetici diverſi nominis ſe attrahunt, ejuſdem ſe repellunt (*a*).

2. Motus electrici non contingunt, niſi corpora actu electrica fuerint *inſulata*, magnetici motus perpetuo contingunt, ergo magnes perpetuo *inſulatus* eſt.

3. Corpora actu electrica movent corpora deferentia, ſeu eadem attrahunt, magnes ferrum attrahit; ergo ferrum eſt inſtar corporis deferentis.

4. Prae-

(*a*) Obſervante Cl. D. Alibardo in addit. ad FransKlini epiſ. t. 2. p.208.

4. Praeterea magnes in ferrum agit ad ingentem distantiam, si ferrum aliud teres, nec nimis magnum fuerit interpositum, eodemque demto ad tantam distantiam magnetis actio non amplius extenditur; ergo si magnes tamquam corpus consideretur electricum fluidum emittens, vel recipiens, ferrum considerari poterit tamquam corpus deferens; atque ideo magnes est instar globi vitrei emittentis; vel resinosi recipientis, ferrum est instar catenae transmittentis.

5. Hoc tamen discrimen intercedit, quod globus vitreus, vel resinosus electricum fluidum non recipiat, aut emittat, nisi fricetur, magnes quocumque tempore absque ulla praeparatione recipiat, & emittat.

6. Melius itaque comparari poterit cum metallo electrico aëri exposito, quod perpetuo electricum est ob majorem metalli respectu electrici fluidi, quam aliorum corporum permeabilitatem, ob quam electricum fluidum in minus resistens metallum, faciliusque permeabile continuo fertur: corpora adeo omnia, quibus magnes insistere potest perfecte non coërcent magneticum fluidum, sed tantummodo minus facile ab eodem permeantur, quam ferrum, aut alius magnes; praeterea vero corpora deferentia electricum fluidum illud ad remotissima intervalla transferre possunt, si corporibus rite coërcentibus confinia sint; ferrum magneticum fluidum, nonnisi per certum intervallum defert sensim debilius (*b*). Ergo nec ferrum perfecte deferens, nec reliqua corpora perfecte coërcentia sunt.

7. Si corporibus deferentibus corpora actu electrica contigua fiant, electricum fluidum per ipsa distribuitur, & eorum vis electrica hebescit. Eodem modo ingens ferri massa

(*b*) Actio enim magnetis, quae per interpositum ferrum propagatur, aucta distantia per gradus minuitur. Muschem. dis. de magn. exp. 52. p. 112. Ex hoc fere fonte reliqua hausi, quae ad magneticorum phaenomenorum historiam spectant.

maſſa magneti propinqua ipſius actionem in admotum ferrum imminuit, aut etiam extinguit.

8. Ex hac porro explicatione intelligitur, cur ferrum interpoſitum, quod actionem magnetis ad majora intervalla extendit, ſi ſit exiguum (4), ſi ingens ſit, eamdem tollat, quod poſtremum quibuſdam Phyſicis impoſuerat, putantibus ideo ferrum magnetis actionem intercipere ex eo, quod magneticum fluidum difficilius per ipſum permearet (c). Enim vero non ideo intercipit actionem, quod difficilius permeari poſſit, ſed quod facilius permeabile, ſi ingens ſit, fluidum magneticum retineat, & *inſulationem* auferat, non ſecus ac corpora electricum fluidum deferentia corporibus actu electricis contigua, ſi ingentia ſint *inſulationem* tollunt, & electricos motus extinguunt. Ex his intelligi poteſt, cur magnes albi ferri laminae applicitus, ferri limaturam in ipſius margine poſitam non attrahat, ſi lamina ampla ſit, ſin autem ſit anguſta, ad eam diſtantiam commoveat, ad quam demta lamina commovere nullatenus potuiſſet; cur item ſcobs ferri albi ferri folio ſuperpoſita a magnete ad oppoſitam folii ſuperficiem admoto eo validius commoveatur, quo folium fuerit arctius.

9. Ut autem eo evidentius pateret ferrum non minus, quam reliqua corpora magnetico fluido permeari ſequens experimentum inſtitui. Acum ferream ex praelongo filo ferreo ſuſpendi, dein enſem ad apicem magnetiſmo imbutum ad eamdem admovi, & aeque vividas acus motiones obſervavi, ac quando alio corpore acus ſuſtentabatur; quo in experimento, quum acus ferro fulciretur, & apex enſis magnetiſmo imbutus cum enſe reliquo magnetiſmo deſtituto continuaretur; luculenter conſtat utrumque corpus optime *inſulatum* futurum fuiſſe; ac proinde motum nullum fuiſſe ſecuturum, ſiquidem ferrum magneticum fluidum coër-

(c) Vid. Mémoir. de l'Acad. 1733.

coërceret, caeterum respectu magnetici fluidi ferrum vices praestare corporis deferentis evidentius constabit inferius, ubi de armatura magnetis sermonem habebo.

10. Corpora electrica se attrahunt, quando ex his alterum fluidum electricum emittit, alterum recipit, se repellunt, quando vel utrumque emittit, vel utrumque recipit, nempe se attrahunt, quando eadem directione per ipsa fluidum electricum movetur; se repellunt, quando movetur directione opposita. Quoniam igitur poli magnetici ejusdem nominis se repellunt, nominis diversi se attrahunt horum unum magneticum fluidum recipere, alterum emittere censendum est; inde intelligitur cur electrica corpora se non repellant, nisi aequaliter electrica fuerint; contra poli ejusdem nominis se repellant, etsi inaequalem habuerint magnetismum; nempe in corporibus electricis, ut contraria sit electrici vaporis directio, non sufficit, ut eodem modo sint electrica, sed praeterea necesse est, ut sint electrica aequaliter, contra in polis magneticis sufficit, ut sint ejusdem nominis, ut contraria quoque sit magnetici fluidi directio.

11. Electrica porro corpora postquam se attraxerunt, se repellunt, quod cum prius horum alterum ex altero electricum fluidum reciperet, paullo post aequaliter electrica facta, vel ambo recipiunt, vel ambo emittunt. Contra magnes constanter ferrum attrahit, & polus magneticus polum item diversi nominis constanter attrahit, ejusdem constanter repellit. Ergo per magnetem, & ferrum constanter eadem directione magneticum fluidum movetur, tum etiam per polos diversi nominis, per polos ejusdem nominis diversa (*).

12.

(*) Lex illa motuum electricorum, quod corpora inaequaliter electrica se attrahant, aequaliter electrica se repellant eatenus vera est, quatenus fluidum electricum per corpora communicatione electrica ad aequalitatem distribuitur, ac proinde, quando bina corpora aequaliter electrica facta sunt ab uno in alterum fluere desinit, sed vel in utraque ingredi, vel

12. Propterea polus unus magnetis constanter magneticum fluidum recipit, alter constanter emittit, non secus, ac in electricis machina vaporem recipit, catena emittit, vel contra, quamdiu globus circumducitur.

13. Quemadmodum igitur in electricis, sic in magneticis, nulla necessitas duplicis fluidi affluentis, & effluentis, quale a Cartesio fuerat propositum (*d*).

14. In locis reliquis magnetis extra polos, quoniam vis magnetica exigua est, per eadem, nonnisi exigua quantitate magneticum fluidum movetur, atque adeo a polo ad polum fertur; inde autem intelligitur cur si transversim magnes secetur, plana, quae sectione gignuntur polos diversi nominis exhibeant (*e*); cum etenim ex uno in alterum magneticum fluidum ante sectionem moveretur, etiam post sectionem planum unum magneticum fluidum emittet, alterum recipiet, ac propterea tamquam poli diversi

ab utrisque egredi nititur pro ut positivam, vel negativam habuerint electricitatem: at si quaestio sit de motibus inter corpora deferentia, & coërcentia sibi invicem admota, quoniam in his lex illa aequabilis distributionis non obtinet, nec etiam ea motuum regula obtinebit. Vitrum tenue, aut talci folium ex serico filo pendulum, ita admoveo corpori metallico catenae electricae adnexo, ut plana vitri superficies ejus corporis superficiei obvertatur ad aliquot pollicum distantiam. In eadem distantia ad oppositam vitri faciem colloco corpus deferens cum solo communicans: vibrat vitrum inter catenam, & corpus deferens oppositum; nempe dum superficies vitri catenae obversa electricum vaporem recipit, vitrum ad catenam fertur, dum opposita vitri superficies aequalem vaporis quantitatem exonerat in adpositum deferens corpus versus illud movetur. Apicem metallicum corpori huic substituo, ut ad majorem distantiam electricum fluidum haurire possit ex vitri superficie, vitrum constanter adhaeret corpori catenae adnexo; dum enim apex metallicus eo una vitri superficie vaporem haurit, ex catena in oppositam superficiem idem vapor fluere pergit, ex quo vaporis ex uno corpore, in alterum corpus constanti fluxu adhaesio illa constans producitur: ergo superficies vitri ad catenam conversa aequaliter, imo magis electrica evadit quam catena ipsa, & tamen catenae constanter adhaeret, quando constans est electrici vaporis ex catena in illam superficiem effluxus. En igitur etiam in electricis exemplum adhaesionis constantis ad similitudinem magneticae attractionis.

(*d*) Confer Regnault entretien 15. n. 3. 6.

(*e*) Muschenb. dis. de magn. exp. 83. pag. 139.

versi nominis erunt spectanda (11): sin autem plano ad axim paralello magnes secetur, extrema, quae prius cohaerebant, se repellent, quod poli ejusdem nominis remaneant (*f*).

15. Quoniam ferrum a polis diversi nominis aeque attrahitur, necesse est, ut a polo fluidum emittente idem accipiat, & ad polum recipientem idem traducat, ut adeo aequali facilitate quacumque directione a fluido magnetico possit permeari.

16. Ferrum porro ex magnetis contactu, multo magis ex magnetici poli juxta ipsius longitudinem ductu, magneticum evadit, etiamsi pannus hoc inter, & magnetem fuerit interpositus (*g*). Ergo ubi semel per ipsum certa directione magneticum fluidum moveri coepit, eamdem deinceps affectare pergit. Inde fit, ut qua parte ferrum magneticum polum tangit, diversi nominis polum acquirat (*h*); si polo debilioris magnetis aptetur polus diversi nominis magnetis validioris, illius virtus augeatur (*i*), si polus ejusdem nominis debilitetur, destruatur, in contrariam mutetur (*K*), ut demum magnetici poli ejusdem nominis vim suam ex vicinia perpetuo imminuant, nominis diversi servent, adaugeant in ratione aliqua distantiarum inversa (*l*).

17. Quod autem diximus ferrum quacumque directione aeque facile a magnetico fluido permeari (15), magnetem nonnisi certa directione (11), ulterius comprobatur, observando polum magneticum, qui ex validiore polo ejusdem nominis in contrarium mutatur (16), antequam mutetur, omnem magnetismum amittere, ac proinde in ferri conditionem redigi: cum igitur simplicis ferri conditio sit veluti gradus, quo

(*f*) Id. l. c. exp. 80. pag. 140.
(*g*) Muschenb. l. c. pag. 100.
(*h*) Rohaul. pag. 244. n. 8. Muschenb. exp. 89. pag. 141.
(*i*) Muschenb. l. c. exp. 89. pag. 141.
(*K*) Muschenb. l. c. exp. 119. pag. 243.
(*l*) Encyc. ex Mitchelio, Article aiman.

quo a polo uno in contrarium fit tranſitus; quando contrarias directiones magneticum fluidum affectat (10), neceſſe eſt, ut ferrum ipſum indifferens ſit ad utramque; atque adeo ad quamcumque magnetici fluidi directionem. Praeterea vero ferrum magnetiſmo imbutum, & magnes ipſe diuturna ignitione vim attrahendi amittunt (*m*), & vim directivam, aut nullam, aut exiguam retinent (*n*), cum tamen poſtquam refrigerata fuerint aeque valide a magnete alio atrrahantur (*o*), quod nempe vi ignis, magnete, & ferro mollibus factis fluidum magneticum aeque facile quacumque directione aditum ſibi comparet, ſicque ipſa (ſi ſatis diuturna fuerit ignitio) in merum ferrum redigat, quod attrahi quidem a magnete poſſit, ferrum vero aliud attrahere non poſſit, ſin autem ignitio breviori tempore perduret; tum frigefacta vim duntaxat aliquam attractivam ſervabunt, quae jugi magnetici fluidi juxta priſtinam directionem fluxu augeri poterit, ac reparari (*p*): magnetem vero, & ferrum ex igne mollia magnetico fluido quavis directione in ipſa incurrenti facilius cedere, quam ſi frigida fuerint experimenta alia inferius adducenda comprobabunt.

18. Corpora contrario modo electrica ad majorem diſtantiam in ſe agunt, quam in corpora deferentia electricitate deſtituta (*q*). Ita ferrum magnetiſmo imbutum ad

 ma-

(*m*) Muſchenb. diſ. cit. exp. 29. pag. 71. 72. magnetem, qui per ſex horas canduerat, nequidem ſcobis ferri particulam elevare potuiſſe, & Boyleus apud eumdem pag. 262.

(*n*) Magnes modo dictus in Muſchenb. exp. acum mobiliſſimam ſex polic. longam nonniſi ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ polli attrahebat, ac repellebat; ferrum ignitum minorem adhuc vim directivam oſtendebat exp. 131. pag. 234.

(*o*) De magnet. conf. exp. cit., de ferro autem dum candet minori vi a magnete attrahi Muſchenb. diſ. cit. exp. 23. pag. 55. 56. vi aequali Monier Encyc. l. c. contendit; conſentiunt tamen poſtquam fuerit refrigeratum priſtina vi magneti adhaeſurum.

(*p*) Quod contigiſſe videtur in exp. Monierii loc. cit.

(*q*) Cl. Beccaria *dell' elettriciſmo artif.* § 68.

majorem diſtantiam in polum diverſi nominis agit, quam in ferrum magnetiſmo deſtitutum (*r*).

19. Foliola metallica ad corpus actu electricum celerius feruntur, ſi deferente corpore, quam ſi coërcente ſuſtineantur (*ſ*). Ita ferrum validius magneti adhaeret, ſi ferrum, quam ſi aliud quodvis corpus ſuppoſitum fuerit (*t*).

20. Ex eodem principio fit, ut ferrum nimis breve minorem ex affrictu magnetiſmum ſuſcipiat, admoto in extremitate ferro alio majorem (*u*); majorem iterum ſi ex utroque extremo ferrum fuerit admotum (*x*); majorem denique, quo admota in extremitatibus ferramenta iiſdem fuerint propinquiora (*y*), eo nempe major ex affrictu vis excitatur, quo facilius per unum extremum magneticum fluidum ingredi poteſt, per alterum egredi, facilior autem ingreſſus, egreſſuſque paratur admotis ferramentis, eoque facilior, quo proximius admoventur.

21. Ex eadem electricitatis analogia corpora deferentia electricum fluidum, ſi levia ſint, ac mobilia, ita diſponuntur, ut viam faciant inter corpora idem recipientia, & emittentia (*z*). Ita ſcobs ferrea circa magnetem poſita in arcus diſponitur, quorum extrema utrumque polum attingunt (*a*).

22. Supra dictum eſt magnetem, nonniſi certa directione a magnetico fluido permeari (11. 17.); inde fit, ut per polorum ſuperficies fluere, ac ſimul colligi fluidum illud non poſſit; eodem modo, quo electricum fluidum per vitro-

(*r*) Muſchenb. cor. 3. pag. 45. diſſ. cit.
(*ſ*) Nollet eſſai ſur l'electric.
(*t*) Reaumur mémoire de la Acad. 1723.
(*u*) Encyc. l. c.
(*x*) Si plures virgae aequales, & ſimiles in longum diſpoſitae magnete fricentur, quae mediae ſunt, maximam vim aquirunt. Encyc. l. c.
(*y*) Muſchenb. exp. 53. pag. 112. diſ. cit.
(*z*) P. Beccaria in epiſ. ad Cl. Beccarium.
(*a*) Rohault. pag. 268. n. 24. Muſchenb. diſ. cit. exp. 66. pag. 121., & exp. 117. pag. 242.

trorum superficies fluere nequit. In electricis vitrum corpore aliquo deferente tegitur, quo vapor electricus colligi possit; ita, & in magneticis superficies polorum bracteis ferreis teguntur (quod unum corpus respectu fluidi magnetici (4) deferens est), ut similiter fluidum magneticum per easdem fluere, ac simul colligi possit; in utrisque ea operimenta ex corporibus deferentibus armaturae vocantur (*b*).

23. Verumtamen non sufficit, ut vapor magneticus per armaturam ferream fluere queat, sed praeterea necesse est, ejus motum omnem ad certam plagam determinari, ut ibidem colligi, & condensari fluidum illud possit; propterea ferreae laminae armaturam constituentes pedem ferreum continuum habent, qui sub magnetem extenditur, & fertur versus pedem alterum ab oppositi poli lamina similiter productum; ita enim magneticum fluidum per unam laminam effluens ad pedem accurrit, unde faciliorem, breviorемque viam invenit, ut ad pedem alterum regrediatur; non secus ac, si alicubi machinae electricae partes catenae partibus fuerint viciniores, ad eam viam percurrendam omnis vapor electricus determinatur, quod per eam viam minimam resistentiam inveniat (*c*).

24. Cum armatura colligat fluidum per polorum superficies fluens (22), intelligitur cur eo pacto magnes majori ferri ponderi sustentando aptus evadat (*d*); cur item armatus magnes majorem magnetismum ferro communicare valeat, quam non armatus (*e*); cur demum magnetis armati virtus, cæteris paribus, sit in ratione superficierum polarium (*f*).

(*b*) Haec comparatio ab Illustri FranKlino proposita fuit epis. 4. ad Collinsonium §. 1.
(*c*) P. Beccaria §. 58.
(*d*) Musch. dis. cit. exp. 74. p. 132. 133.
(*e*) Id. l. c. exp. 76. p. 133.
(*f*) Id. exp. 79. p. 135.

25. Quod autem ex armaturae pedum vicinia magneticum fluidum determinetur, ut ab altero in alium fluat (24), ulterius confirmatur obſervando ex armatura ſphaeram activitatis magnetis imminui (*g*), tum armaturam ipſam oppoſita pedibus parte minimam vim poſſidere, ac demum armaturae crura, dum verſus pedem protenduntur, & proinde majorem magnetici fluidi copiam transferre debent, craſſiora etiam fieri debere (*h*).

26. Conjecturam itaque feci vim armaturae crurum auctum iri, ſiquidem fluxus magnetici fluidi ab uno ad alterum pedem interciperetur, de qua re ut certior fierem, polum cognominem aequalis propemodum virtutis ad armaturae pedem admovi, & revera deprehendi eo pacto illius armaturae crura, tum ad majorem diſtantiam, tum majori virtute ferrum attraxiſſe: polus diverſus admotus contrarium praeſtitit effectum.

27. Ideo ferrum a magnete attrahi propoſueram, quod ferrum reſpectu fluidi magnetici corpus deferens ſit (3), id vero ex eo confirmatur, quod ferrum molle, & armaturae aptius, proindeque magnetico fluido colligendo magis idoneum validius etiam magneti adhaereat; ferrum item phlogiſtico deſtitutum, & armaturae ineptum debiliſſime a magnete attrahatur (*i*).

28. Ex hac ipſa obſervatione confirmatur, quod ſuperius indicavimus (16) ferrum magneticum effici ex magnetici fluidi fluxu per ipſum certa directione fluentis; quo enim ferrum durius eſt, atque adeo ex §. praec. difficilius a magnetico fluido permeatur, eo etiam difficilius, tardiuſque magneticam vim acquirit (*K*).

29.

(*g*) Id. exp. 77. p. 134. Encyc. l. c.
(*h*) Id. Eſſai. de phyſ. §. 556.
(*i*) Muſch. Eſſai. §. 555. 557. Idem ex eo, quod fluido magnetico chalybs difficilius pervadatur majori vi ab eodem contra magnetem impulſum iri concludit, unde contra magnetici fluidi exiſtentiam argumentum deſumit §. 787. p. 313. Confer. etiam eumd. in diſ. cit. exp. 33. 39. pag. 127.
(*K*) Encyc. l. c.

29. Quando inter corpora positive, & negative electrica corpus deferens aptatur validius utrisque id corpus adhaerebit, quam si alterutro tantum admoveretur, imo majus pondus eo pacto machina, & catena simul elevare poterunt, quam si seorsim in corpora sejuncta actionem suam exercerent; interea tamen fluidum electricum per corpus deferens appositum a catena in machinam redibit, sicque exteriora electricitatis signa extinguentur. Ita ferrum transversim a polo ad polum magnetis traductum, & majus pondus sustinere valet, quam bina ferri frustra seorsim polis appensa, & interea ab uno ad alterum polum fluidum magneticum revehit, sicque sphaeram activitatis magnetis in reliqua exteriora corpora imminuit, ac ferme extinguit (*l*).

30. Idipsum ferrum magnetis virtutem conservat, restituit, dum magnetico fluido certa directione fluenti liberiorem viam praebet, magisque expeditam, ex cujus fluidi certa directione per ferrum, & magnetem fluxu ipsorum vim nasci, servari, augeri superius innuimus (16). Asserti veritatem confirmant annuli chalybei, qui etiam ea directione siti, quae spontaneae directioni sit opposita magnetismum non amittunt, quin imo ex contrario magnetis affrictu aegrius virtutem deperdunt, & licet aliquando amisisse videantur paullo post eamdem recuperant (*m*).

31. Muschenbroeckius observavit, quod si magnes suspensos retinere possit aliquot annulos ferreos sibi invicem admotos, unus autem ex iis ita suspendatur, ut utrumque armaturae pedem simul tangat, tunc hunc unum sustineri, reliquos decidere (*n*); ego vero generatim sum expertus magnetem armatum, qui exteriore unius pedis parte tres claves facile sustentabat, nec unicam sustinere potuisse, quan-

(*l*) Musch. dis. cit. exp. 77.
Encyc. l. c.
(*m*) De la Hire phil. trans. n. 188.
(*n*) Exp. 75. p. 173. dis. cit.

quando ipſarum altera utrumque pedem tangebat: ratio autem perſpicua eſt ex §. 29., quod ſcilicet in poſtremo caſu magneticum fluidum, per appoſitam clavim ab uno in alium pedem traductum per magnetem ipſum circumiret, atque adeo minorem in ferrum extrinſecus admotum actionem exercere poſſet; nil igitur ſingulare eſt in Muſchenbroeckii experimento, nec opus eſt cum eodem confugere ad ferri figuram, ut phaenomeni ratio eruatur: ex eadem ratione intelligi poteſt, cur pes unus magnetis contra albi ferri laminam applicitus multo validius, & copioſius ferri limaturam margini circumpoſitam alliciat, quam ſi ambo armaturae pedes ipſi laminae aptentur; in primo nimirum caſu magneticum fluidum per ferri laminam effuſum ad ipſius margines copioſius pervenit, quam in altero, quando per laminae portionem pedibus interjectam ad ſocium pedem faciliorem invenit regreſſum.

32. Quo vis magnetis major, eo armatura craſſior eſſe debet (*o*); ut, & ferrum tranſverſim adhaerens (29); crura item armaturae dum majorem magnetici fluidi quantitatem ſucceſſive verſus pedes recipiunt, ſucceſſive etiam craſſeſcere debent (25): ergo ferrum nonniſi certam magnetici fluidi quantitatem tranſmittere commode poteſt, cum corpora electricitatem deferentia maximam facillime ferant.

33. Electricitas catenae fortior erit ſi machina corporibus perfecte deferentibus, quam ſi imperfecte deferentibus ſuffulta ſit, & viciſſim machinae electricitas fortior erit, ſi catena perfecte, quam ſi imperfecte deferentibus corporibus ſuffulciatur: ſimiliter vim unius poli majorem fuiſſe deprehendi (*p*), quando oppoſitus polus praelongum ferrum contiguum habebat, quod praeſtantiſſimum deferens corpus eſſe demonſtravimus (27).

34.

(*o*) Id. Eſſai §. 554.
(*p*) Id ipſum a Savery fuerat obſervatum vid. Sag. delle tranſ. filoſof. del Cavaliere Dereham t. 5. p. 100. §. 26.

34. Si folium auri verſus catenam apicem ſuum dirigat, atque inter hoc, & catenam tranſverſim metallum mucronatum admoveatur, bracteae apex eam directionem amittet; ſic dum acus ex ſuperpoſito magnete ſupra tabulam erigitur, ſi alia inter illam, & magnetem admota fuerit, prima ſtatim decidet. En igitur phaenomeni explicationem, quod omnes fluidorum currentium leges reſpuere Muſchenbroeckius affirmat, ex quo concludit magnetem non operari effluviis, aut fluido quocumque alio (*q*).

35. Bina fila ex catena, vel machina actu electricis pendentia a ſe mutuo recedunt (*r*). Ita binae acus apicibus ſuis ex utrovis magnetis polo pendentes invicem divergunt. 2. Angulum eo majorem fila electrica conſtituunt, quo major eſt electricitas (*ſ*). Ita acus angulum majorem conſtituent, ſi ex admoto polo validiore ejuſdem nominis, poli ſuſtinentis magnetiſmus augeatur, ad paralleliſmum accedunt, ſi admoto ferro, multoque magis ad oppoſitum polum traducto (29), ejuſdem magnetiſmus minuatur. 3. Fila electrica magis divergunt ſi ipſis admoveatur corpus deferens (*t*). Ita acus ex admoto ipſis ferro majorem divergentiam acquirunt. 4. Si filum ad contactum corporis deferentis perveniat, ipſi adhaeret (*u*). Ita ſi acus ferrum attingat, cum eodem jungitur. 5. Quod ſi fila inter bina corpora aequaliter electrica poſita ſint parallela evadunt (*x*). Ita ſi acus inter polos cognomines pendeant ipſarum divergentia minuitur, aut penitus aufertur. Cavendum autem eſt in hiſce experimentis, ne acuum, quae adhibentur, extrema magnetiſmo, ac praeſertim contrario imbuta ſint, quod eorum experimentorum eventum perturbare poſſet.

(*q*) Diſſert. exp. 54. p. 113.
(*r*) Beccaria §. 94. n. 1.
(*ſ*) Ibid. n. 2.
(*t*) Ibid. n. 3.
(*u*) Ibid. n. 4.
(*x*) Ibid. n. 5.

36. Si maximum ferri pondus, quod a magnetis polo ſuſtentari poteſt eidem appenſum ſit, admoto polo diverſi nominis alterius magnetis appenſum ferrum decidet, ſi vero ejuſdem nominis polus alterius magnetis admoveatur ad eam diſtantiam, ad quam eumdem repellit, ferrum non modo non decidet, verum etiam aliquot alia ponduſcula ipſi appenſa ſuſtentabit, quod ſcilicet in primo caſu liberiori facta via fluido magnetico per datum polum fluenti ejuſdem affluxus per appenſum ferrum minuatur, in altero impedito fluidi magnetici tranſitu, a fluido contraria directione fluente, id majori copia per appenſum ferrum moveri cogatur, quod apprime congruit cum iis, quae §. 26. propoſuimus, ex quibus ea lex erui poteſt polos ſe attrahentes vim ſuam in ferrum extrinſecus admotum imminuere contra dum ſe repellunt majori vi ferrum extrinſecus poſitum allicere.

37. Docent nonnulli armaturae pedes validius attrahere interna parte, quam externa. Id verum eſſe tantummodo videtur, quando utriuſque pedis externae, internaeve partes ſimul agunt, per ferrum tranſverſum iiſdem applicitum (29), falſum quando agunt ſeorſim; nam in primo caſu fluidum, quod ad vicinum polum copioſius accurrit, per ferrum attractum tranſit (§. cit.), ſecus ac in altero caſu contingat (§. praeced.).

38. Docent etiam, ſi pedes armaturae introrſum ſub magnetem vergant validius attrahere, quam ſi vergant extrorſum, quod iterum verum duntaxat eſſe videtur, quando utroque pede ſimul utimur; nam ſi unico pede utamur, is eo debilius adhaerens ferrum ſuſtentabit, quo proximior erit pedi alteri, ad quem divertere poteſt magneticum fluidum.

39 Quando unico pede utimur majus ferri, quam alterius corporis pondus ſuſtentabit, quando utroque majus alterius corporis quam ferri. In primo enim caſu copioſius

ad

ad ferrum, quam ad aliud corpus, fluidum affluet, in altero dum per ferrum diffunditur tanta copia in oppositum polum non redibit.

40. Acuminata porro corpora majori copia electricum fluidum recipiunt, & emittunt (*y*); idipsum in magnetico obtinere videtur: extremitates enim conicae cylindrorum, qui magnetismo imbuti fuerunt pondus ferreum multo gravius sustinent, quam plana eorumdem basis (*z*), & limatura ferri copiosius magnetis, vel magnetici ferri angulis adhaeret, quam planis eorumdem superficiebus (*a*), & anguli armaturae (22) externi, si acuti fuerint vim magneticam imminuunt, ac disperdunt (*b*), non secus, ac metallicus apex catenae, aut machinae adnexus electricam vim imminuit (*c*), & acutum demum ferrum ex affrictu, contra ferrum, aut rigidum aliud corpus, majorem, quam planum ferrum virtutem acquirit (*d*).

41. Cum autem ad eamdem distantiam magnetis actio extendatur, sive corpora, quaevis fuerint interposita, sive nullum corpus intercedat (*e*), inde conjectabam aërem non minus, quam corpora reliqua, fluidi magnetici expansioni resistere, ac propterea coërcentis corporis vicem praestare, qualem aëris resistentiam respectu electrici fluidi experimenta demonstrarunt (*f*). Quamquam enim interpositam flammam electrici vaporis actionem ad longinquius intervallum extendere novissem (*g*) imminuta, ut puto, aëris resistentia, magnetici non item (*h*), quamquam

h ma-

(*y*) FranKlin. epis. 1. §. 17.
(*z*) Muschenb. dis. pag. 97.
(*a*) Id. l. c. exp. 64. pag. 118., & exp. 116. pag. 241.
(*b*) Ideo in rotunditatem secondos esse monet idem Muschenb. Essai de Physiq. §. 556.
(*c*) FranKlin. epis. 6. §. 76. P. Beccaria §. 191. 232.
(*d*) Muschenb. dis. cit. exp. 245. pag. 268.
(*e*) Saggi di naturali esperienze intorno alla calamita, esp. 1. & 2. Muschenb. dis. cit. pag. 59. & seq.
(*f*) FranKlin. epis. 2. §. 22.
(*g*) P. Beccaria §. 457.
(*h*) Muschenb. dis. cit. exp. 28. pag. 70.

magnetem in vacuo boyleano idem ferri pondus gestare, quod in aperto aëre compertum habuissem, quamquam magnetem in aëre constitutum magnetem alium ad datam distantiam aequali vi attrahere meminissem, sive is in vacuo, sive in aëre collocaretur (*i*); hisce tamen experimentis non acquiescebam, ex eo vel maxime, quod ferrei apices majori copia magneticum fluidum, & emittant, & recipiant (40), ac similis apicum proprietas in electricis ex aëris resistentia in primis nascatur (*K*), etsi in vacuo adhuc obtineat (*l*). Sequens igitur in eam rem experimentum institui. Sub campanam pneumaticam ferramentorum congeriem collocavi, & in suprema recipientis parte notam apposui, ut ad idem punctum semper magnetis polum aptarem, dein ex opposita recipientis parte ad eamdem notae altitudinem acum nauticam collocavi, & tentando distantiam maximam inveni, ad quam acus illa nautica a magnete ad notam apposito commoveri posset; postremo aërem exhantlavi expectans futurum, ut magnetis actio ad acum usque pervenire amplius non posset; siquidem aër magnetico fluido resistentiam faceret; enim vero ablato aëre resistentia minui similiter debuisset fluido ad supposita ferramenta tendenti, hacque ratione aucto ejusdem fluidi ad ea ferramenta affluxu id ab acu averti debuisset; perinde ac catena electrica, cujus extremum per verticem recipientis pneumatici traducitur corpora extrinsecus posita ad datam distantiam agitat, quamdiu aër prohibet ne electricum fluidum in subjectam lancem fluere, ac disperdi possit, ablato autem aëre, & liberiori parata via electrico fluido ad lancem tendenti catenae actio in exteriora corpora extinguitur (*m*). Sed nihil hujusmodi observare con-

(*i*) Id. dis. cit. exp. 25.
(*K*) P. Beccaria §. 217. 218. & seq.
(*l*) Id. §. 235.
(*m*) Consule Beccariam §. 121,

contigit, cum ad eadem diſtantiam magnes in acum ageret, ſive vacuum recipiens eſſet, ſive aëre plenum, ex quo proclive erat concludere per ſpatia aëre vacua aeque difficulter magneticum fluidum moveri, ac per corpora alia quaevis excepto ferro. Quantum porro firma eſt hujus experimenti veritas, tantumdem erroribus obnoxiae eſſent hypotheſes, quae ad id explicandum excogitari poſſent: ſatius igitur erit conſectaria quaedam adnotare; ſcilicet 1. Vapor electricus, dum ex corpore in corpus tranſit ſtridorem edit, magneticus non item 2. Corpora actu electrica auram quamdam excitant, magnetica nil ſimile praeſtant. 3. Interpoſita ut diximus flamma electricam atmoſphaeram ad majus intervallum extendit, magneticam non mutat, quae omnia ex memorata aëris reſiſtentia intelligi poſſe videntur, quae, cum reſpectu electrici fluidi ingens ſit, magneticum non afficiat.

42. Diximus polos ejuſdem nominis utcumque inaequaliter magneticos, tamen ſe repellere (10); id in majori aliqua tantum diſtantia verum eſt, namque in minoribus diſtantiis, non modo vis repulſiva non augetur, ſed minuitur, & tandem in attractivam mutatur, eoque citius, quo virium differentia major eſt: tamdiu nempe ſe repellunt, quamdiu fluidum magneticum per utroſque contraria directione movetur, contraria autem directione movetur, quamdiu polus debilior in tanta diſtantia ab actuoſiori conſtituitur, ut fluidum ab actuoſiori emanans ac in debilius irruens, per debiliorem polum eadem directione non feratur, tunc enim juxta ſancitam motuum legem (10), vis repulſiva in attractivam mutabitur; & revera, quando ad polum dati nominis ejuſdem nominis polus validior admovetur in diſtantia adeo exigua, ut eumdem attrahat tardius, vel citius polus debilior in contrarium mutatur (16), quod demonſtrare videtur magneticum fluidum a validiore magnete erumpens alterius fluidi a debiliori polo contraria

directione effluentis resistentiam vicisse, & propria directione per ipsum permeasse (§. cit.): imo vero caeteris paribus eo citius debiliori poli virtus mutatur, quo inter ipsius vim, & vim validioris major differentia intercedit, & quo magis ad se mutuo admoventur (§. cit.); attractio autem polorum cognominum in data distantia eo item major existit, quo virium differentia major est, & imminuendo sensim distantias vis repulsiva eo citius in attractivam mutatur, quo virium differentia major, eo tardius, quo minor existit, quemadmodum sequentibus experimentis comprobavi.

1. Poli magnetici debilioris virtutem adhuc imminuebant per ferrum transversum eidem admotum (30), tum vero polus validior ejusdem nominis ad exteriorem illius partem admotus longe fortius adhaerebat, quam si nullum hujusmodi transversum ferrum adfuisset, unde patet in contactu polorum ejusdem nominis attractionem augeri, si debilioris poli virtute imminuta, virium differentia augeatur.

2. Quod si ferro transverso non debilioris poli, sed robustioris vim imminuerem, tunc attractiones in contactu similiter minui observabam, imminuta virium differentia.

3. Ad apicem acus magnetismo imbutae, & per filum libere suspensae polum magneticum ejusdem nominis paullatim admovebam, & ad hujus latus ferream clavim aptabam, quando autem ad talem acus viciniam polum adduxeram, ut jam vim repulsivam in attractivam mutandam fuisse conjectarem, si clavis abfuisset, ipsam auferebam, eodemque, ut plurimum momento acus ad magnetem apice suo ferebatur, id ipsum luculentius adhuc transverso ferro, aut polo diversi nominis admoto, tum sublato, sicque vi imminuta, ac dein restituta experiri licebat, unde constitit polos cognomines ad distantiam eo majorem se attrahere, quo inter eorum vires differentia major intercedit.

Cum

Cum igitur eae conditiones, quae efficiunt, ut dati poli vis directiva tardius, citiusve mutetur, eaedem efficiant, ut is a cognomine polo proximius, remotiusve, tum validius, debiliusve attrahatur, cumque mutata poli directio a contrario fluxu magnetici fluidi producatur (16), inde confirmari videtur repulsivam quoque vim in attractivam ob eamdem caussam mutari, ob servatam scilicet a fluido validioris poli per debiliorem propriam directionem (*n*).

43. Muschenbroeckius, quando in minori aliqua distantia polorum vis repulsiva minuitur, aut extinguitur, non revera minui, aut extingui censet, sed cum attractiva duntaxat conjugi, quae magis crescat, quam repulsiva imminutis distantiis, & proinde eamdem aequet, aut superet, unde, vel nulla vis repulsiva remaneat, vel etiam attractiva nascatur (*o*). Haec verò Muschenbroeckii sententia confirmatur experimento 3. §. praeced., nam clavis robustiori polo admota debiliorem acus polum certe non repellere, sed potius attrahere debuisset, & tamen repulsivam vim servabat, quod praestitisse videtur attractivam vim validioris poli in debiliorem, imminuendo, quae si integra fuisset repulsivam facile superasset, atque extinxisset.

Quae quidem Muschenbroeckii theoria cum principiis nostris egregie consentit; nam fluidum magneticum ad debiliorem polum spectans, & fluido robustioris poli resistens vim repulsivam facit; excessus virium fluidi ad robustiorem polum spectantis, quo debilioris fluidi resistentiam superat, & per debiliorem polum propriam directionem servat, attractionem producit.

44.

(*n*) Mitchelius ideo vires repulsivas, imminutis distantiis, imminui censet, quod poli repellentis debilioris virtus imminuatur (Encyc. l. c.) sed saepe observatur in aliqua distantia vim repulsivam imminui, aut etiam in attractivam mutari, etiamsi debilior polus debilitari, aut mutari adhuc non potuerit. Enim vero fluxus fluidi certa directione sufficit ad attractionem faciendam, ut vero magnetismum mutet per tempus aliquod debet perdurare (16).

(*o*) De magn. exp. 15., ubi si attractivae vires a repulsivis subtrahantur has certas reciprocas distantiarum proportiones servare adnotavit.

44. Chalybis porro temperati magnetiſmo imbuti virtus caeteris paribus difficilius, quam ſimplicis ferri virtus a robuſtiori polo mutatur (*p*): An non ideo, quod difficilius validioris poli fluidum per chalybem, quam per ferrum ſibi viam faciat (28)? An non itaque debilius chalybei poli ejuſdem nominis ſe attrahere debent, & ad minores diſtantias, quam poli ferrei, ſiquidem ea, quam propoſui, theoria locum habeat? Ex eadem quoque theoria intelligitur, cur poli cognomines, quamdiu ſe repellunt ſuas vires in ferrum extrinſecus admotum mutuo augeant (36); quando vero jam repulſio in attractionem mutata eſt potius imminuant; quamdiu enim ſe repellunt fluida contraria directione lata ſe mutuo coërcent, quando vero ſe jam attrahunt a robuſtiori polo in debilius, vel contra magneticum fluidum movetur, atque adeo in primo caſu per feramenta extrinſecus admota fluidum illud adigitur, in altero per admotum polum diſſipatur.

45. Magneticae acus directio ea eſt, ut uno extremo fluidum magneticum recipere, altero emittere quam commode poſſit, quam proprietatem electricorum corporum phaenomenis analogam eſſe ſuperius monuimus (21), inde vero fit, ut ferrum magnetiſmo deſtitutum, ſi collocetur in eo ſitu, ad quem acus ſponte ſe dirigit ex magnetici fluidi juxta eam directionem fluxu magneticum evadat (*q*), imo eamdem magneticam vim acquirat, ſi juxta lineam conſtituatur, quae meridianam magneticam ad angulum quemvis interſecet, ſed eo tardius, debiliuſque, quo angulus major fuerit, donec ad angulum 90° nullam adipiſcatur (*r*): ferrum quoque eo citius vim eam acquirit, quo longitudo majorem ad craſſitiem proportionem habuerit, & quo mollius fuerit, multoque majorem ſuſcipit, ſi candens eo in ſitu ſponte, aut aqua frigida affuſa, refrigeſcat: extre-

(*p*) Encyc. l. c.
(*q*) Muſchenb. diſ. exp. 132. pag. 216.
(*r*) Id. l. c. ab exp. 133. ad 136.

tremitas autem, qua ad polum boreum inclinat, borealem polum, qua inclinat ad auſtralem, auſtralem acquirit, & ex contrario ſitu vim priſtinam amittit, oppoſitamque adipiſcitur (*ſ*), quae omnia cum iis conveniunt, quae de magnetiſmo per magnetem inducto obſervata ſunt (16.20.) unde recte Muſchenbroeckius concluſiſſe videtur (*t*), *vim magnetis terreſtris eſſe admodum univerſalem, eam ſe extendere per totum terrarum orbem, agere in omne ferrum, id dirigere haud aliter, quam ferrum allici, regique a magnete obſervetur.*

46. Acus vero ferrea magnetiſmo deſtituta, debilius quidem, dirigitur tamen juxta meridianam magneticam, ſed indiſcriminatim, quae extremitas polo telluris ſeptentrionali proximior eſt ad illum convertitur, quae vero auſtrali ad auſtralem dirigitur, & inverſa acus aeque facile contraria directione ſe collocat, quamdiu ex diuturna mora in aliquo ſitu conſtantem magnetiſmum non acquiſivit (*u*): ea enim directione ſe collocat, qua viam faciliorem praebeat magnetico fluido certa directione fluenti (21), quapropter cum id fluidum, quamdiu magnetiſmo deſtituta eſt oppoſitis directionibus juxta ejus longitudinem aequali facilitate feratur (15. 17.), idcirco oppoſitas directiones indiſcriminatim acus affectabit.

47. Neque ſolum terreſtris magnetis actio manifeſta fit, quando ex diuturno magnetici fluidi per ferrum fluxu id magneticum demum evaſit (44), verum etiam in ferro magnetiſmo deſtituto ejuſdem effectus obſervantur; nam ſi virga quaevis ferrea in ſitu quovis collocetur, ut meridianam magneticam interſecet, mediatas virgae, quae ad polum magneticum borealem telluris inclinat vim poli ſeptentrionalis oſtendit, quae ad auſtralem, auſtralis, inverſaque virga eae medietates contrarium polum protinus exhi-

(*ſ*) Id. loc. ult. cit.
(*t*) Exp. 146. pag. 268.
(*u*) Savery. vid. ſag. delle tranſ. del Cav. Dereham t. 5. §. 32. pag. 102.

exhibent, ita ut polaritas, quae respectu telluris constans est, respectu virgae ferreae ex mutato situ mutetur, donec ea virga constantem magnetismum ex diuturna mora in certo situ non fuerit adepta (*x*), ex quibus, & vis magnetis terrestris conspicua efficitur, & confirmatur magnetismi contrarietatem in contraria magnetici fluidi directione reponendam esse, & demum evincitur ferrum magnetismo destitutum a magnetico fluido aeque facile quacumque directione permeari (15. 17.), cum eadem virga magnetico fluido opposita directione fluenti, tam facilem transitum praebeat, ut ipsius extremitates ex inversione in oppositos polos illico mutentur.

48. Quoniam ferrum ex magnetici fluidi juxta certam directionem fluxu magneticum fit, ex contraria ejusdem fluidi directione contrarium acquirit magnetismum (16.45.), quoniam facilius ex fluido per meridianum excurrente, vel a magnete prodeunte vim magneticam acquirit, si ex igne molle, sponte, vel superaffusa aqua refrigescat (*y*), quoniam chalybs durior difficilius magnetismo imbui potest (*z*), sed majorem recipit, & diutius servat (*a*), quoniam ignitio (17), percussio, attritus (*b*) magnetismum destruunt, inde confici videtur magnetismum in certa partium dispositione situm esse, ob quam ferrum magnetico fluido ex una parte recipiendo, ex altera emittendo aptum sit, eamque dispositionem ab ipso fluido induci, tum auferri posse, idque eo facilius, quo ferrum fuerit mollius.

49. Cartesiani, qui motus magneticos ex solis mechanicis legibus explicare contendebant, partibus magnetici fluidi, tum magnetis, ac ferri poris figuram tribuerunt, quam

(*x*) Id. l. c. §. 18. pag. 97.
(*y*) Conf. loca cit. §. 16., & 45.
(*z*) Encyc. l. c.
(*a*) Muschenb. dis. pag. 232.
(*b*) Id. pag. 73. 74.

quam maxime opportunam esse opinabantur, aëris quoque resistentiam, ac reactionem huc accerserunt; cautiores alii, ut Muschenbroeckius (*c*) Wisthonus (*d*), cum Cartesianos scopum non attigisse animadverterent, vel ipsius magnetici fluidi existentiam in dubium revocarunt. Ego ad mechanicas rationes omnia exigere minime potui, ac ne studui omnino quidem, cum nec ipsa electricitatis theoria usque eo perduci potuerit; malui igitur analogia ductus theoriae electricae innumera, sejunctaque phaenomena ad certas classes revocare: nec vero diffiteor hanc me comparationem multo, quam fecerim, versare potuisse accuratius. At summa tantum capita speciminis loco attingenda esse putavi, ne in re facili nimia prolixitas lectori molesta evaderet.

50. De Analogia inter fluidum electricum, ac magneticum hactenus: nunc de identitate horum fluidorum aliqua essent addenda. Et experimenta quidem nupera, per quae acus magnetica fit artificiali electricismo, aut ipsius poli mutantur; tum observationes, quibus constitit acus nauticae directionem vi fulminis mutatam fuisse, identitatem confirmare utique possent, si definitum esset, utrum electricum fluidum magnetismum inducat magnetici fluidi vices gerens, an agat duntaxat ad instar communis ignis (*e*), quod olim Muschenbroeckius proposuerat (*f*), quae minus dubia forent, si certis experimentis constaret, num extremitates acus quae meridiem, & septentrionem respiciunt

i po-

(*c*) Dis. p. 57. & seq., & a p. 63. ad 76., & p. 218., & Essai §. 587.
(*d*) Apud eumdem p. 65. dis. cit. Cl. Monnier in act. Acad. R. S. P. an. 1733. contra fluidi magnetici receptam theoriam argumenta proposuit.
(*e*) Revera ad magnetismum inducendum tanta requiritur electrici fluidi copia, talis acus inter vitreas laminas dispositio, tanta ejusdem tenuitas, ut electricum fluidum acus colorem mutare, quin imo ipsam liquefacere possit (Cl. D. Alibard. in addit. ad FranKlinum t. 2. pag. 137. 147. 148.) atque adeo effectus praestare, qui ab ignis violentia producuntur.
(*f*) Dis. pag. 225. exp. 106.

polum constanter acquirant cognominem plagae, ad quam diriguntur, quaecumque fuerit directio fluidi electrici acum permeantis, num contra in quocumque acus situ extremitas, per quam electricus vapor ingreditur, septentrionalis, per quam egreditur australis perpetuo evadat (*g*), num demum acus juxta aequatorem magneticum collocata ex electricitate nullum magnetismum acquirat, quemadmodum ignitum ferrum eo in situ refrigeratum nullum adipisci experimenta demonstrarunt (45).

51. Caeterum contraria, quae se se offerunt argumenta minime reticenda videntur. Scilicet primo magneticum fluidum dum a magnete ad ferrum, vel a ferro ad magnetem fluit, per interpositam aëris laminam, etiam in tenebris non lucere, quod electricum fluidum facere solet. 2. Ab aëre resistentiam nullam pati, nec ab interposita candela ejus actionem mutari, nec stridorem edere, auramve excitare (41), quae omnia phaenomena in electrico fluido observamus. 3. Magnetem ipsum frictione electricum fieri, tumque novam proprietatem acquirere a priori distinctam, cito cessantem. 4. Resinosa, serica corpora, quae fluidum electricum coërcent, magneticum non magis, quam caetera coërcere 5. Metalla omnia, ferro excepto, quae fluidum electricum deferunt, magneticum non magis, quam caetera deferre (*h*). 6. Corpora deferentia electricum fluidum maxima copia deferre facile posse, deferentia electricum nonnisi certa quantitate (37) 7. Ex affrictu corporum electricum fluidum deferentium vim nullam electricam nasci, contra ex ferri contra ferrum certa lege affrictu maximum magnetismum produci. 8. Demum eas tempestatum mutationes, quae electrica phaenomena insigniter

(*g*) Non consentiunt FranKlini, & D. Alibardi experimenta t. 2. p. 144. 145.
(*h*) Musch. Essai. §. 187. n. 3.

gniter mutant, non eodem modo magnetica afficere, contra, quae magnetica afficiunt, non similiter afficere electrica (*i*), quae omnia fluidorum horumce identitatem, si non refutare, at certe dubiam reddere posse videntur.

(*i*) Encyc. artic. cit.

EJUSDEM.

De colore Sanguinis experimenta nonnulla.

COccineum rutilumque ſanguinis colorem, exhauſto aëre, in atrum, & nigricantem converti Cl. Viri ſcripſerunt (*a*), cum contrarium alii traderent ſupremam nempe ſanguinis ſuperficiem in vacuo non minus, quam in aperto aëre rutilum colorem ſervare (*b*). Quod quidem experimentum cum multis phyſiologicis graviſſimis quaeſtionibus illuſtrandis opportunum eſſe animadverterem, ea cautione, eaque diligentia renovari cupiebam, ut nullum de ipſius eventu dubium ſupereſſet. Itaque Virum experientiſſimum J. B. Beccaria rogavi, ut idipſum ſuſciperet, quod humaniter praeſtitit, quemadmodum ſum expoſiturus.

1. Sanguinem ex homine febricitante eductum, & quaſſatione ſolutum in bina pocula vitrea aequalia, & ſimilia infudit, horum alterum ſub recipiens pneumaticum collocavit, alterum in aperto aëre reliquit. Subducto aëre ſanguinem ſub recipiente poſitum inſigniter elevari, in ſpumam faceſſere, intumeſcere in bullas obſervavimus ſenſim increſcentes, quae tandem diſruptae aërem emittebant elaſticum, ex quo altitudo mercurii in appoſito indice augebatur: interea color ſanguinis eleganter floridus, & rubicundus perſeverabat.

Cum vero repetitis diu exantlationibus omni aëre exhauſtus ſanguis ſubſediſſet, floridum colorem cum atro, & nigricante mutavit, quemadmodum ex comparatione cum eo, qui extra recipiens erat, facile innotuit; etenim non in ſuprema tantum ſuperficie, verum etiam in tota mole multo obſcurior, ac nigrior deprehendebatur; poſtremo cum poculum

(*a*) Dorſten apud Haller n. 9. ad §. 203.
(*b*) Gorter comp. trac. 31. §. 9. n. 9., & Rega conſent. SchvvencKe haematol. p. 116.

culum eductum ex recipiente fuiſſet, paullo poſt contentus ſanguis rutilum in ſuprema ſuperficie colorem recuperavit, & rutili ſtrati craſſities, aëre profundius pervadente, ſenſim, ſenſimque increſcebat, adeo ut poſt aliquod tempus totum ſanguinem aeque rutilum, ac prius, ſe inveniſſe Cl. Beccaria narraret.

3. (α) Cum igitur aër ſanguini admixtus ruborem faciat, inde cum Lovvero intelligimus, cur ſanguis venae pulmonalis, perinde ac arterioſus floridus ſit, cur contra arteriae pulmonalis ſanguis perinde ac venoſus atro colore inficiatur.

(β) Cur poſtquam ſanguis arterioſus, & venoſus per aliquot minuta aëri expoſitus fuit omne coloris diſcrimen tollatur (*).

(γ) Cur item, obturata trachea, & impedito aëris acceſſu ad pulmonem id diſcrimen ſanguinis arterioſi, & venoſi tollatur.

(δ) Cur inflato in cadavere pulmone, eadem diverſitas reſtituatur (c).

(ε) Cur rejectus ex pulmone ſanguis ſpumoſus floriduſque eſſe ſoleat.

(ζ) Cur in foetu, qui pulmone non utitur, ſanguis obſcuri, & rubiginoſi coloris, & aquoſus perpetuo reperiatur (d).

(η) Cur in eryſipelate, aliiſque morbis, quos ingruens putredo comitatur, ſanguis intenſe floridus, ac rutilus obſervetur (e), aëre nempe putredinis vi ex eodem prodeunte, cur item in confirmata putredine, omni prorſus aëre difflato, ſanguinis color niger, & luridus evadat.

(θ) Cur

(*) Hammerſchmidt. in diſput. cui titul. notabile diſcrimen inter ſanguinem arterioſum, & venoſum §. 22.

(c) Vid. Lovverum de mot. cord. p. 159. & ſeq., & conſentientes Bohon, Duverney apud Haller n. 11. ad §. 200.

(d) Obſervante Haller l. c.

(e) Gorter. Chirurg. §. 14. 29. & alibi.

(ϑ) Cur demum in gangraena partes emphysematicae evadunt aëre vi putredinis prodeunte, tumque sanguis ex scarificationibus effluens nigro colore inficiatur.

Sanguis quassatione solutus, & aequabili rubore praeditus, dum putrescit, ruborem amittit, nigrumque colorem acquirit, & primo quidem ea mutatio in superiori sanguinis strato contingit, quae pedetentim ad inferiora strata progreditur, quemadmodum in suis circa putredinem experimentis D. Gaber observavit, cujus phaenomeni ratio esse videtur, quod superiora strata putrescentia aërem facilius emittant, quam illa, quae iisdem subjiciuntur.

Definiendum autem superesset, num sanguis ruborem in pulmone receptum in venis amittat ex eo, quod aërem per corporis superficiem expellat (*f*), an quod aëri elasticitatem demat, & rubori servando imparem efficiat, inde enim forte intelligeretur, cur diversitas sanguinis arteriosi, & venosi aliquando maxima, alias nulla fuerit observata (*g*).

4. Sanguis porro quamdiu solutus est, aequaliter coloratus apparet, dum autem concrescit in suprema superficie ruborem servare, in infima nigrum colorem induere ab antiquissimis temporibus est observatum (*h*), idque post Galenum (*i*), veteres plerique tribuerunt humori melancholico, qui reliquo sanguine gravior, & nigrior proprio pondere ad infimam vasis partem delaberetur, interea dum cruor specifice levior supernataret, nec multum ab hac theoria recesserunt recentiorum non pauci, qui ruborem parti magis sulphureae, leviori, tenuiorique tribuerunt, inferioris partis nigredinem densiori, magisque terrestri sanguinis

(*f*) Quae Mery sententia est apud Haller. n. f. ad §. 201., quam idem Hallerus rejicit n. a ad §. 432.

(*g*) Haller prim. lin. phys. §. 117. 206. caeterum eam diversitatem nuper confirmavit Hammerschmidt. disp. cit. §. 22.

(*h*) Arist. hist. anim. lib. 3. cap. 19. Hippoc. de gland. 1. 6.

(*i*) Com. in 3. epid. 1. 5. de atra bile toto libro, de elem. 1. 11.

guinis parti adſcribendam eſſe exiſtimarunt (*K*), & quamquam, inverſa ſanguinea placenta, ut inferior ſuperficies ſuprema evaderet, quae vero ſuprema fuerat in inferiorem abiret, illam rubrum, hanc nigrum colorem induere cernerent (*l*), id nihilominus tribuere maluerunt gravioribus, & nigrioribus ſanguinis partibus, quae ſuperiora deſerant, & proprio pondere ad inferiora trudantur (*m*), quamquam non levis erat objectio in maſſa ſolida, & concreta, qualis ſanguinea placenta eſt, haud facile partes juxta variam ſpecificam gravitatem diſtribui poſſe: ut igitur phaenomeni cauſſam aſſequerer, ſequentia experimenta inſtitui.

5. Sanguinem ex vena hominis pleuritici eductum ſtatim affudi aequali quantitate in bina pocula vitrea aequalia, & ſimilia. Alterius ſuperficiem ſuperaffuſo oleo ad pollicis altitudinem cooperui, alterum in libero aëre reliqui, in utroque ſanguis coagulabatur, & is, qui aëri expoſitus erat rutilum admodum ruborem in ſuperficie aëri contigua contrahebat, reliqua ſuperficiei pars, quae poculi parietes tangebat in atrum colorem mutabatur: ſanguis vero alterius poculi, educto per ſyphonem oleo, aequabiliter niger eſt deprehenſus, interea aëri expoſitus ruborem in ſuperiori ſuperficie adeptus eſt, in aliquibus tantum locis, ubi oleo adhuc inunctus erat, nigrum colorem ſervavit. Id deinceps experimentum in recenti vitulino ſanguine coram Cl. Beccaria, pari ſucceſſu, renovavi.

6. Cum igitur nigricans color non in infima tantum ſuperficie naſcatur, verum etiam in quacumque alia poculi parietibus contigua (*n*) patet nigredinem non fieri a partibus gravioribus fundum petentibus: imo cum ſuprema etiam

(*K*) SchuvencKe Haematol. cap. 11. p. 117. Gorter compend. trac. 31. §. 22. n. 3. alii permulti.

(*l*) Notante primum Fracaſſato in tranſ. phil. anni 1667. num. 27. art. 4. qui id aëri tribuit.

(*m*) ScuvencKe l. c., qui globulos alios prae aliis ponderoſiores eſſe docet.

(*n*) Conſent. Boer. Chem. t. 1. p. 261. edit paris.

etiam ſuperficies atro colore infecta ſit, ſi tenui olei ſtrato obtegatur manifeſtum fit ab immediato aëris attactu ruborem oriri: errant propterea, qui putant ruborem a levioribus partibus eſſe repetendum, niſi forte eo ſenſu leviores eſſe velint, quod ob contiguum, admixtumque aërem aliquanto ſolutae, minuſque invicem cohaerentes ſtratum efforment ſpecifice levius (*o*), interea dum partes ipſae a reliquis ſanguineae maſſae partibus nullo modo differant.

7. Hanc etiam partium ſpecifice leviorum hypotheſim alio experimento refutare aggreſſus ſum, quod a Lovvero olim jam tentatum inveni (*p*), ſupremam nempe rubicundam coagulati ſanguinis ſuperficiem cultro abradebam, & nigricantem ſubjectam ſuperficiem detegebam, quae, ubi per breve tempus aëri expoſita fuiſſet, novum rubicundum ſtratum priori ſimile ſuppeditabat, atque eo pacto repetita abraſione totam ſanguineam placentam in rubra ſtrata convertere facile potuiſſem.

8. Praeterea vero, ſive amplo, ſive anguſto vaſe ſanguis recipiatur, in ſuprema tantum ſuperficie rubicundus apparet; attamen ſi ex particulis datae ſolummodo gravitatis rubor oriretur, eo craſſius rubicundum ſtratum eſſe deberet, quo vas arctius, craſſius item, quo major copia ſanguinis in eodem vaſe contineretur, nec fieri poſſet, ut modica ſanguinis copia in amplum vas effuſa tota rubeſceret, quemadmodum quotidianis experimentis comprobatur.

9. Poſtremo ſanguineam placentam mox ex poculo eductam, atque adeo in lateralibus, & inferiori ſuperficie nigricantem reti ſuperimpoſui, & non multo poſt in lateralibus, & inferiori ſuperficie aeque florida evaſit, ac in ſuprema, ut aequabiliter colorata quaquaverſum deprehenderetur.

10.

(*o*) Quae LeuvvenhoecKii ſententia eſt in obſervationibus circa ſanguinem menſ. Junii 1674.

(*p*) Loc. cit.

10. Ex his autem etiam eorum ſententia infirmatur, qui inferiorum partium nigredinem ex ſuperiorum pondere, aut preſſione oriri autumant; obſervavimus enim tenuiſſimum olei ſtratum ſanguinis ſuperficiem inungens nigritudinem ſervare, ex quo tamen vix ulla compreſſio poteſt expectari; deinde, ſi nigrities ex incumbentium partium preſſione oriretur, prout ſanguis profundior eſſet, magiſque compreſſus, eo majorem nigredinem acquireret, cum tamen iis in locis, quibus aërem non attingit, aequabiliter niger conſpiciatur.

11. Quoniam igitur ſuprema ſanguinis ſuperficies rubra eſt, quando aërem tangit, nigra, quando aër ab eadem arcetur (5), & ſimiliter infima ſuperficies, quae nigra eſſe ſolet, admiſſo aëre, rubeſcit (9), quoniam ſanguis totus rubeſcere poteſt, ſi vel ſimul, vel ſucceſſive aëri totus exponatur (7. 8.), quoniam rubor, & nigrities, non per ſucceſſivos gradus aut creſcit, aut minuitur pro altitudine incumbentis ſanguinis, ſed aequabilem ruborem, & aequabilem nigredinem ſanguis acquirit (10), quoniam aëre exhauſtus ſanguis niger evadit (2), manifeſtum fit ab aëris attactu ſanguineae placentae ruborem oriri.

12. Ex his intelligitur, cur ſi conquaſſatione aër ſanguini admiſceatur, & tardius concreſcat, & majorem ruborem acquirat (*q*).

Cur ea, quae ſanguinem fluidum ſervant, eadem ruborem ſervare ſoleant, & contra.

13. Sanguis porro, dum concreſcit, denſior evadit (*r*), & interim ruborem, ut diximus, amittit: errant igitur, qui ex majori denſitate ſanguinis arterioſi, & condenſatione in pulmone nata ipſius ruborem deducunt: quod ſi in pulmone, non maſſae ſanguineae, ſed globulorum denſitatem augeri intelligant, quo id tandem experimento comprobarunt? Profecto inter globulos ſanguinis arterioſi, & venoſi nullum

k dif-

(*q*) Ex Lovvero, Haleſio aliiſque.

(*r*) Jurin in compend. tranſac. philoſophic. verſione italica Derehami tom 3. pag. 3. exp. 13.

discrimen microscopii ope detegere potuit Hammerschmidtius (*s*), quod ostendit coloris diversitatem non in componentibus particulis, sed in varia earumdem miscela, ac dispositione positam esse.

14. Cum in foetu sanguis aquosus simul, & obscurus deprehendatur, (3-ζ) patet ex sola seri mixtione ruborem non oriri.

15. Ad attritum quod spectat, ex quo ruborem in pulmone nasci plerique existimant, jam recte opposuit Lovverus in musculis multo magis, quam in pulmone sanguinem atteri (*t*), attamen ab ipsis nigricantem prodire, & praeterea adnotandum in ejusdem Lovveri experimento, in cadavere strangulati canis, inflato pulmone, sanguinem comprimi potius, quam atteri debuisse, nihilominus ruborem sanguini fuisse restitutum, ac proinde soli attritui ruborem in pulmone natum minime esse adscribendum.

16. Neque vero facile est definire, cur coagulatus sanguis ea in parte, qua aërem non attingit, niger evadat; num ex eo, quod liber aëris per sanguinem transitus prohibeatur, qui dum libere permeat salia, vel quid aliud deponat rubori servando aptum, quod non videtur; nam in clauso etiam spatio suprema sanguinis pars rubicunda diutissime remanet, dummodo tenuem aëris lamellam superpositam habeat; num ex eo, quod atmosphaerae pondere sanguis prematur, quod iterum probabile non est; siquidem atmosphaerae pressionem non minus superficies patitur oleo inuncta, quam ea, quae immediatae aërem contingit; num demum aër sanguini admixtus, & globulis sanguineis interpositus ruborem servet, contra concrescens cruor contentum in poris aërem expellat, vel ita fixum reddat, ut rubori efficiendo impar evadat, quod aucta concreti sanguinis densitas, & emissus ab aliis concrescentibus fluidis aër confirmare quodammodo videntur.

JOH.

(*s*) L. c. §. 6.

(*t*) Consentit Cl. Sauvages Phys. elem. pag. 110.

JOH. BAPTISTAE GABER

Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.

QUanti Medicinam, & naturalem scientiam intersit putrefactionis historia, jam ipse noverat Philosophiae instaurator Verulamius, qui Medicis idcirco, & Philosophis saepe auctor fuit, ut illius caussas, modos, & phaenomena diligentius pervestigarent; eaque passim commoda significavit, quae in affines facultates derivari possent. Atqui tanti Viri monita usque adeo neglecta sunt, ut vix pauci rem tam necessariam tractandam, & illustrandam susceperint; sed plerique ex aliis quaecumque extiterant experimenta, & observationes describere, aut ex praeconceptis opinionibus consectaria deducere maluerunt, quam rem tentare, & scrutari diligenter: ex eo fortasse etiam praetextum aliquem nacti, quod videbant Chymicorum sectam, & quidquid Chymicam saperet male audire apud prudentiores Medicos, qui ex illius abusu tantam intelligebant rei Medicae perniciem illatam. Sed egregiam huic facultati navavit operam Clariss. Pringle, qui rem diu ante neglectam retractandam adgressus est, novasque aperuit in tam multiplici, & complicata disquisitione proficiendi, progrediendique vias. Magni hujusce Viri exemplo, & monitis excitatus ejus vestigia persequi constitui, quod & rei utilitatem perspectam haberem, & vitae, officiique mei ratio commodam mihi occasionem exhiberet hujusmodi tentandi experimenta. Neque tamen totam simul putrefactionis historiam investigandam suscepi, ne pluribus intentus minorem in singulis diligentiam adhiberem. Solos humanos humores, neque omnes, sed praecipuos tantum per experimenta scrutatus sum, cum haec cogni-

tio prae caeteris omnibus plurimum conducere videatur ad multorum morborum internas caussas detegendas, eorum effectus, seu symptomata explicanda, atque ideo ad indicationes eruendas. Quoniam autem experimenta nostra cum Pringlianis minime conveniunt, caussas idcirco ex ipsis experimentis eductas aperiam, quibus eventuum diversitatem adscribendam puto.

Lubens omitto inutilia omnia tentamina, qualia antequam aliquid certi in hoc genere assequi possem, fere innumera instituere opus fuit: ea duntaxat recensebo, quae novam aliquam lucem videntur suppeditare.

1. Quinquagenarius vir absque febre inveterato ictero confectus est. Cadaver integro nychtemero, brumali tempore, loco frigido repositum fuerat: hoc transacto temporis intervallo, dissecabatur: conspiciebantur crassa intestina cinereis foecibus infarcta, tenuia flavescente muco hac illac conspersa, cysticus, & choledocus ductus pervii: cystis ipsa bilis in atrum vergentis ingenti copia distendebatur. Vesicula pertusa bilem vitreo vase excipiebam, modicum foetebat, viscida erat, & tenax: minusculae hujus portioni unam, vel alteram aquae fortis guttulam affudi: effervescebat, erumpebant ad liquoris superficiem aereae bullae cum sibilo, qui admoto ad aures vasculo percipiebatur, atque ipso tactu sentiebam liquorem incalescentem.

2. Superstitem bilem in tres portiones distinctas totidem vitreis vasis apertis infudi, vario situ, & vario caloris gradu distribui; unum in hypocausto ad trigintaquinque circiter gradus Reaumuriani Thermometri calefacto, alterum in alio hypocausto, quod viginti quinque tales calebat gradus, tertium vero cubiculi servabat temperiem, quae inter septimum, & decimum fere continebatur. Viginti quatuor horis elapsis singulas portiones acidis exploravi. Quae bilis triginta quinque graduum calori fuerat exposita, ea dilutior evaserat, vixque indicia levissimae

effer-

effervescentiae praebebat: bilis, quae vigintiquinque gradus caloris passa fuerat, diluta quoque apparuit, cum acidis aliquanto magis, sed parum admodum efferbuit: quae demum fuerat in cubiculi temperie relicta suam viscviditatem servaverat, & aeque vehementer, ac antea (1) cum acidis conflictabatur. Quod postremum experimentum coram Equite Salutio, Ludovico de la Grange, D. Cigna, & Mich. Ant. Plazza luculentissimis testibus, aliquot exinde horis simili eventu renovavi.

3. Ex ejusdem cadaveris vena eodem tempore eductus sanguis rubro-flavescentem exhibebat colorem. Ejus sanguinis portio simulac fuit educta, & nitri spiritu dilutiori permixta effervescentiam similiter exhibuit, multo tamen minorem, quam bilis; quo sanguine in digestione per paucas horas relicto, flavum serum a cruore secedebat, quinimo flavo colore superficies cruoris inficiebatur. Idem sanguis per tantumdem temporis, ac bilis in hypocaustis servatus majorem effervescendi vim retinuit, quam bilis, quae vis ex mora sensim hebescebat.

4. Ex hujusmodi observationibus haec videntur posse deduci consectaria.

1° Tantam in morbis nasci posse alkalescentiam, ut humores cum acidis effervescant: neque enim probabile est, eam in cadavere mutationem contigisse, quod per horas viginti quatuor servatum fuerat in loco frigido, ubi per plures dies servati humores sani ad talem alkalescentiae gradum vix pervenissent.

2° Levem putredinis, & foetoris gradum, qui extra corpus nullum adhuc alkali praebet, quemadmodum experimentis inferius exponendis constabit, intra animale corpus alkali producere.

3° Alkali intra corpus genitum, & bile contentum volatile admodum esse, & expeditum, quippe quod vigintiquinque graduum calore tam brevi tempore maxima ex

parte

parte in auras avolaret, secus a reliquorum elementorum nexu aliquanto magis intricatum esse illud alkali, quod in sanguine continetur, minusve volatile, quum per idem tempus, eodem calore, minor ejusdem portio dissiparetur.

5. Ex postrema hac observatione conjecturam feci, an forte in tentaminibus, quae circa putredinem fuerunt instituta, ex quibus indubias alkali notas nonnulli comperisse affirmant, alii vix levissimas observasse testantur, eventuum discrepantia ex vario caloris gradu, varia corruptorum corporum aetate, majori, minorive geniti alkali libertate repetenda esset.

6. Non aliter ac bilem corruptam, integram bilem tentavi, sanguinis cruorem, & serum: singulorum tres distinctas portiones memoratis (2) tribus diversis caloris gradibus exposui, & quum acidis mineralibus eos liquores quotidie explorarem, deprehendi omnium humorum citissime bilem efferbuisse (*a*), & citius adhuc humanam, quam bubulam; aliquanto tardius cruor corruptus cum acidis efferbuit, omnium tardissime serum effervescentiam exhibuit. Quae porro effervescentiae iisdem phaenomenis distinguebantur, quae paullo ante memoravi (1); neque vero cum solis acidis mineralibus corrupti humores effervescebant, verum etiam cum dilutissimo aceto distillato confligebantur. Quae artificiali calori expositae fuerant humorum portiones foetorem citius, & effervescentiam dederunt; citius quinimo pervenerunt ad summum effervescentiae gradum, quem cum attigissent, continuato ejusdem loci calore effervescendi vim non solum amiserunt (*b*), sed ingratissimum

(*a*) Inter omnes humores citissime putrescere. Baglivi Oper. omn. p. 439. & digestam sal alKali copiosius dare. Henninger de bile. Argent. 1705. apud Haller not. 2. ad §. 99.

(*b*) Imo serum in hypoc. ad 35. calido nunquam efferbuit, argumento dicendi alKali in sero natum ex eo caloris gradu dissipatum fuisse ea proportione, qua gignebatur.

mum foetorem in herbaceum, ac minime injucundum odorem commutarunt (*c*). Caeterum multo citius plerumque prodiit foetor, quam alkalescentia, idemque tardius desiit.

7. Dixi corruptos humores cum acidis mineralibus efferbuisse, quod ut clarius designem, notare juvat me ut plurimum aqua forti usum, quae diluta admodum erat, nec ullum, vel minimum excitabat motum aquae communi admixta; tantumque abest, ut acidorum concentrationi tribuenda sit effervescentia (*d*), ut potius putem, si nimia sit eorumdem concentratio, effervescentiam inde minorem reddi posse ex eo vel maxime, quod cito nimis, arctiusque ex acidis concrescentes animales humores effervescentiae motui resistant: adhibito enim aceto distillato, quod corruptos humores nequaquam coagulabat, vehementem pariter oriri effervescentiam deprehendi; imo aliquando ex admixto aceto distillato totum corruptum serum in spumam abiisse.

8. Jam vero dum Clariss. Pringle experimenta perpendo, adverto eumdem aliquando partes putrescentes calori centum graduum Thermometri Fahrenheitiani (qui quidem calor triginta gradibus Reaumurianis fere respondet) exposuisse, in quo calore animales humores citius quidem putrescunt, veruntamen eadem celeritate, ac temporis brevitate ex putrescentia acquisitam alkalescentiam amittunt; cum itaque limites temporis, inter quos ex eo calore putrescentes humores alkalinam indolem ostendunt, angusti admodum sint, fieri facile potuit, ut nulla alkalescen-

(*c*) Bilis in loco tepido mox rancescit, graviter olet, & post longum tempus ambrae odorem contrahit. Boerh. in praelect. ad §. 99. ad verbum *acescentibus*. Quod vero de bile docuit Boerhaave, id generatim in omnibus humoribus tepido loco putrescentibus obtinere comperi.

(*d*) Quemadmodum in bile sana contingit, quae cum fortissimis acidis effervescit, observante Verehyeno, & Hombergio. Mémoir. de l' Acad. des Scienc. 1700. eo fere modo, quo aqua ipsa ab oleo vitrioli incalescit. Boerh. Elem. Chim. tom. II. pag. 301.

lescentiae signa obtinuerit, si intra eosdem limites non instituerit experimentum, videlicet si paullo ante quam alkali genitum fuisset, vel paullo postquam in auras abiisset, corruptos humores exploraverit. Praeterea etiamsi intra illos ipsos limites tentasset experimentum, cum tamen ea proportione, qua alkali gignitur, magna ex parte ex ambienti calore in auras dissipetur, eo pacto non nisi levia alkalescentiae indicia eruere debuit, dum tamen ex minore caloris gradu evidentissima sum assecutus. Si igitur humoribus ad eum caloris gradum putrefactis semper usus fuisset Clariss. Pringle, ex proposita interpretatione nostra experimenta cum ipsius experimentis conciliari posse censeo: sin minus, vel varietati individuorum, ex quibus humores educti fuerant (1. 3.), vel vario gradui concentrationis acidorum (7), vel alii, quam ignorem, caussae diversitas adscribenda erit.

9. Sanguinem, dum e vena flueret, continua quassatione solvebam, quassatum deinde putrefieri sinebam; rubens, & floridus, qui apparuerat color, pedetentim mutabatur, & in atrum, nigrumve vergebat, quae quidem mutatio non eodem tempore totam sanguinis massam inficiebat, sed a superiori parte incipiens temporis progressu sensim ad inferiorem propagabatur.

10. Si vero sanguis ita quassatus fuisset, & tardius putrescebat, & tardius praebebat alkalescentiae indicia, quam cruor a sero sejunctus, quod scilicet prae omnibus humoribus serum tardissime putrescat.

11. Cum propositis experimentis comperissem alkali in auras avolare ex miti caloris gradu, experiri adhuc volui, an non illud ipsum alkali colligere possem, ac retinere. Vitreo itaque alembico serum sanguinis ex febricitantibus paucas ante horas eductum excepi: alembicum reposui in hypocausto inter vigintiquinque, & vigintiocto Thermometri Reaumuriani gradus calente, collum alembici per fora-

foramen in operculo ligneo hypocausti apertum trajiciebatur eo consilio, ut eidem adaptatum capitellum cubiculi, decem circiter ejusdem Thermometri graduum, temperiem servaret, & exhalans vapor inibi colligi, & in liquorem posset condensari: capitelli rostro phialam agglutinavi, quae collectum liquorem reciperet; alternis diebus obtinebam distillati liquoris drachmas tres, cui acida admiscens, varium, vario tempore, consequebar effectum. Portio, quae primum adscenderat, seri odorem, & saporem referebat, limpida erat, & diaphana, neque cum acidis, neque cum alkalicis effervescebat: portio, quam altera vice obtinui, foetidum quidem, modice tamen olebat; ejusdem ferme saporis erat, & pelluciditatis ac prima, atque in his cum secunda conveniebat tertia: nulla huc usque effervescentia. Quarta portio foetebat graviter, turbida erat, & opaca, coloris subalbentis, nullam exhibuit effervescentiam, sed levem rubelli coloris tincturam ab admixtis acidis assequebatur. Quinta portio, quae scilicet post dies decem distillaverat, limpida iterum apparuit, admixtis acidis effervescentiam dedit cum sibilo, qui admoto ad aures vase percipi poterat, bullas, spumamque excitavit (e). Sexta portio itidem limpida, debilius efferbuit. Cum jam nihil liquoris ex eo caloris gradu distillare observarem, alembicum fregi, ut residuum examini subjicerem; crustam efformaverat glutinosam subrufam, corio similem, quae pessimum foetorem emittebat, nullum tamen, vel levissimum affusis acidis indicium dedit effervescentiae. Ex hoc experimento patere arbitror vigintiquinque inter, & vigintiocto caloris gradus alkali dissipari, quod si colligatur, effervescat, massam inde relinqui foe-

 ten-

(e) Hoc experimentum tentavi matutinis horis, cum adesset D. Cigna: horis vero vespertinis, cum illud Clarifs. D. Bruni observandum praeberem, eventu quidem non caruit, sed minor inde nata est effervescentia: Heliotropii tinctura huic liquori admixta minime coloris mutationem passa est.

tentissimam utique, sed emisso alkali ad effervescendum ineptam.

12. Cum sanguinem intra vas accurate obturatum servassem, diutius alkalescentem indolem retinuit, etsi calori vingintiquinque graduum expositus fuisset; dum vero obturaculum educerem magno impetu vapores erumpebant, quibus totum cubiculum tetro admodum odore inficiebatur: vaporum explosio orta videtur ab aëre per putrescentiam extricato. Ex quo experimento intelligi potest, cur intra vasa humani corporis humores vix foetentes jam alkali contineant (§. 4. n. 2.), cum educti, & in apertis vasis servati gravem foetorem prius acquirant, quam ullum alkali indicium praebeant (6): nempe intra vasa humani corporis, ubi primum alkali gigni incipit, retinetur, cum in apertis vasis exhalans, tum demum percipi possit, quando majori copia gignitur, quam in auras dissipetur.

13. Quoniam vero serum integrum post decem demum dies alkali emisit (11), nonnisi post illud temporis intervallum corruptum fuisse censeo, tum quod clauso in vase tardius humores corrumpantur, tum quod inter illos serum tardissime putrescat: quod si corruptum jam humorem distillationi commisissem, minime dubitabam protinus alkali proditurum; propterea cupiebam corruptis humoribus idem experimentum capere, quod sero sano institueram, ut & tempus definirem, quo alkali distillare inciperet, & collecto distillante liquore, eam coloris caerulei vegetabilis mutationem iterum tentare, quam ob cunctationem praecedenti experimento obtinere nequiveram. Sanguinem itaque putrefactum, & ex putrefactione cum acidis effervescentem (quem solum alkalescentem humorem tum habebam in promptu) alembico inclusi vitreo, eidemque caloris gradui exposui eodem apparatu, quem in superiori experimento adhibueram. Et quum prima die stillantes liquoris drachmas duas acidis variis miscerem, vehementem effervescentiam observavi,

eum-

eumdemque liquorem fucco violarum inſtillans, color viridis non minus elegans ortus eſt, quam ex affuſo ſpiritu c. c. oriretur, inductoque rubore ex admixta aqua forti, is nova diſtillati liquoris affuſione deletus eſt, & violaceus color reſtitutus. Liquor, qui per quinque ſequentes dies diſtillavit, eaſdem alkali notas retinuit, quibus elapſis cum nihil amplius diſtillare obſervarem, alembicum fregi, & ad ejus fundum cruſtam inveni deſcriptae (11) ſimilem, ſub qua portio ad ſyrupi conſiſtentiam redacta recondita erat, quae alkalicam adhuc indolem oſtendebat, ſed levem, adeo ut ſpatio duodecim horarum, per quod ſuper feneſtram, cujus temperies circa decem gradus Thermometri Reaumuriani erat, diſſipato alkali, nulla ipſius veſtigia remanſerint.

14. Igitur & efferveſcentia, & colorum mutatione conſtat verum alkali illud eſſe, quod in humoribus putrefactis natum leviſſimo calore in auras diſſipatur. Ipſis equidem humoribus putrefactis colorum mutationem tentare maluiſſem, niſi & ſeri corrupti turbida opacitas, & ſanguinis rubor, ac bilis flavedo ambiguum de hiſce experimentis judicium effeciſſent; limpido itaque exhalante humore eadem experimenta inſtituere tutius eſſe putavi, ut omne erroris periculum declinarem.

15. Quum foeteret graviſſime reſiduum diſtillationis, quamquam omni alkali orbatum fuiſſet, manifeſtum videtur ab alkali foetorem exaltari quidem poſſe, & magis penetrantem effici, non autem ab eodem produci, quandoquidem ſupereſt eo ſublato.

16. Quoniam tamen continuato calore non ſolum alkaleſcentia, ſed & foetor ſimul perit (6), videtur is odor a volatilibus admodum particulis etiam proficiſci, ſed quae ab alkali volatili diſſimiles ſint, & plerumque citius gignantur, tardiuſque diſſipentur, cum ante alkaleſcentiam, & poſt ipſam foetor plerumque percipiatur (8). Praeterea vero aliquando alkaleſcentia adeſſe poteſt modico foe-

 tori

tori conjuncta, ut observavimus (13), viciffim maximus foetor abfque alkalefcentia, ut in poftremo experimento deprehendimus (11. 12.). Ex quibus differentia inter foetidas, alkalinafque partes confirmari videtur, quam Clarifs. Pringle alio argumento demonftraverat, animadvertens corruptae urinae halitus minime perniciofos effe, etfi prae caeteris corruptis corporibus maximam alkali falis quantitatem contineat; cum corruptorum aliorum humorum halitus infefti admodum fint, ex quo efficitur eos ab alkalici falis natura difcrepare.

17. Quae cum ita fint, videtur alkali volatile non effe productum neceffarium putrefactionis, neque gradum alkalefcentiae gradui putrefactionis refpondere, fed nativa falia oleis permixta vi putrefactionis volatilia reddi, fi de ftirpium partibus fermo fit, fi vero de partibus animalium, videtur alkali actione vifcerum jam inchoatum, aut aliis adhuc elementis involutum ex putrefactione perfici, aut extricari: quapropter eo major quantitas alkali falis ex putrefactione nafcatur, quo major fit in corporibus eidem expofitis falium, aliorumque elementorum quantitas, quae falibus permixta volatilitatem alkalinam eifdem impertiri poffunt. Si enim confideremus ftirpes acefcentes, & acidum in diftillatione emittentes, poftquam folidis animalium partibus fubactae in fanguinem, aut humores converfae funt, vix accefcere (*f*), & parum acidi diftillando emittere (*g*), fed fere ftatim putrefcere, & in diftillatione copiofum alkali acidi loco praebere; fi confideremus alkali ex corporibus putrefactis citius adhuc in diftillatione prodire (*h*); fi animadvertamus actione vifcerum, & putredine reliqua falia fere omnia deftrui, nec in corruptorum corporum

(*f*) Macquer elem. de chym. theor. cap. 15. pag. 173. 174., & elem. de chym. pratiq. tom. 2. pag. 377. 380.
(*g*) Id. tom. cit. pag. 381., & feq.
(*h*) Id. tom. cit. pag. 378. 379.

porum combuſtorum cineribus ullum alkali amplius reperiri (*i*); ſi perpendamus eos humores, qui maximam ſalium quantitatem continent, ut urinam, maximam alkali copiam putreſcendo praebere (*j*), confirmari videtur ea, quam ſequimur, Chymicorum ſententia, qui cenſent ſalia volatilia a reliquis ſalibus ortum ducere, quae vi viſcerum animalium putredine, igne ita immutentur, ut alkalica evadant, nullo ſuperſtite priſtinae formae veſtigio (*k*). Inde vero intelligi poſſet, cur ſalia volatilia putredinem arcere poſſint (*l*), non ſecus, ac reliqua ſalia, quamquam ex putredine ortum ducant: quantitas enim alkalinorum ſalium per putredinem productorum reſpondet quantitati ſalium nativorum praeexiſtentium, quae porro ſalia cum arcendae putredini non ſufficerent, mirum non eſt genitum alkali ejuſdem progreſſui impediendo ineptum fuiſſe: quod ſi nativa ſalia majori copia praexiſtant, videtur utique, & genitum alkali putredinis progreſſum retardaturum: urina enim quae ſalibus copioſe referta eſt, non tam corrumpitur, nec ejuſdem corruptae halitus adeo perniciosi ſunt, quemadmodum aliorum humorum (*m*), quod non aliunde, quam a praeexiſtentium ſalium, & geniti inde alkali copia, & efficacia repetendum eſſe videtur.

18. Urina ſana nonniſi trium dierum intervallo ita putreſcebat, ut cum acidis efferveſceret; veruntamen urina hominis putrida febre laborantis brevi tempore, ſpatio nimirum vigintiquatuor horarum, hujuſmodi alkaleſcentiam obtinuit. Sanguis ejuſdem hominis multo quoque citius, quam ſanguis ab homine pleuritico eductus alkaleſcentiae indi-

(*i*) Id. tom. cit. pag. 380. 381.
(*j*) Pringle Tr. ſur les ſub. ſept., & antiſep. mémoire 1. exper. 2. pag. 161.
(*K*) Macquer l. ult. cit., & tom. eod. pag. 343. 344. 349. 350.
(*l*) Quod, & Pringle teſtatur (l. c. mem. 1. exp. 2. 3.), & ego pluries expertus ſum, & propriis etiam experimentis confirmavit Cl. Gilbertus in diſp. de putred. Lipſ. 1753. §. 7. pag. 13.
(*m*) Pringle loc. cit. ad not. j.

indicia ostendit. Sed haec spectant ad aliam classem experimentorum, quae in tempus aliud differenda esse constitui, ut opportunitatem nactus morbosos humores explorare, atque ex phaenomenorum comparatione ea deducere possim, quae morborum, eorumdemque indoli detegendae, aut therapejae perficiendae apta videbuntur.

19. Nec vero in gravissima quaestione propriis tantum oculis fidere volui, sed Clariss. D. Bruni Anat. Profess., & Londinensem Socium rogavi, ut experimentis meis interesset, ut & errores, qua est solertia, praecaveret, & auctoritate sua experimentorum veritatem tueretur.

P. S. Doctissimus Navier (*n*), quum carnem bubulam vasis accurate obturatis, ac glutinatis inclusam putrefactioni commisisset in gradu caloris inter nonum, & vigesimum Thermometri Reaumuriani, postquam in liquamen, & putrilaginem resolutam fuisse observavit, per vitream retortam cum excipulo accurate glutinatam, arenae balneo distillavit, & liquorem clarum, subalbidum, ac foetentem primum obtinuit, ex quo caerulea carta, nonnihil rubra facta est: hunc tamen liquorem alkalino volatili sale refertum esse comperit, cum superaffuso alkalici fixi liquore spiritus volatiles urinosi ex miscella prodierint; aucto deinceps igne, donec retorta candesceret, distillare adhuc continuavit per horae quadrantem similis liquor pauculo oleo imbutus, postremo sal volatilis albus, concretus, vegetationis specie, modica quantitate ad retortae collum depositus est, & vapores, qui adhuc per horae quadrantem prodierunt oleum crassum, ambrei coloris suppeditarunt. Cum vero laudatus Auctor incorruptam carnem arenae balneo similiter distillasset, liquor, qui eo calore prodiit, lim-

(*n*) Postquam mea haec experimenta in aliquem ordinem disposuissem, ut typis committerem Celeb. Navier dissertationem de ossium mollitie legendam praebuit Clariss. Bertrandi, in qua pag. 33., & seqq. Clariss. Viri citata experimenta reperi.

limpidus erat, nullumque alkalescentiae indicium exhibuit, nec nisi violento igne hujusmodi demum sales prodierunt. Quae quidem Clar. Viri experimenta nostris egregie consentire videntur: nam & miti caloris gradu ad putrescentiam usus est, & vasis exacte obturatis corrumpendam carnem inclusit, ac propterea alkali retinuit, quod liquore primum extillante solutum levissimo calore prodiit, cum ex integris carnibus, nonnisi per auctam vim ignis demum educeretur (*o*).

(*o*) Idipsum in partibus omnibus animalibus obtinere, ut corruptae levissimo caloris gradu alKali distillando praebeant, integrae majorem ignis vim requirant, ut id alKali emittant. Clariss. Macquer docuit Chym. pratiq. loc. cit. ad not. h.

DE

FASCICULUS STIRPIUM

Sardiniae in Dioecesi Calaris lectarum

A MICHAELE ANTONIO PLAZZA

CHIRURGO TAURINENSI,

Quas in usum Botanicorum recenset

CAROLUS ALLIONUS.

ACANTHUS foliis sinuatis inermibus *Linn. spec. pl.* 639.
Acanthus sativus, seu mollis Virgilii *C. B. pin.* 383.
Habitat in vinetis circa Calarim.

ACANTHUS foliis pinnatifidis spinosis *Linn. sp. pl.* 639.
Acanthus aculeatus *C. B. pin.* 383.
Crescit iisdem locis.

AEGYLOPS spica ovata aristis breviore *Linn. sp. pl.* 1050.
Festuca altera capitulis duris *C. B. the.* 151.

AGROSTEMMA glabra foliis lineari-lanceolatis, patalis emarginatis coronatis *Linn. sp. pl.* 436.
Lychnis foliis glabris calyce duriore *Bocc. sic.* 27.

ANAGALLIS foliis cordatis amplexicaulibus, caulibus compressis *Linn. sp. pl.* 149.
Anagallis hispanica latifolia maximo flore *Tournef. inst.* 143.

ANTIRRHINUM foliis caulinis lanceolato-linearibus sparsis: radicalibus rotundis ternis *Linn. sp. pl.* 615.
Linaria annua purpuro-violacea, calcaribus longis, foliis imis rotundioribus *Magn. monsp.* 159.

ANTIRRHINUM procumbens ramosum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimus, floribus caudatis axillaribus.
Folia succosa, glabra, alterna, sessilia, supremis angustioribus elliptico acuminatis. Pedunculi foliis altiores, singulares, uniflori. Flos cyanaeus cum hiatu clauso. Calcar floris acutum pedunculo subaequale, & florem longitudine aequans

aequans. *Capſula rotunda calyce minor*. *Eritne*? Linaria luſitanica maritima polygalae folio *Tourn. inſt.* 169.

Anthemis caule ramoſo, foliis pinnato-multifidis ſetaceis, calycibus villoſis pedunculatis *Linn. ſp. pl.* 895.

Buphthalmum cotulae folio *C. B. pin.* 134.

Aphanes *Linn. ſp. pl.* 123.

Alchemilla minima montana *Col. ecphr.* 145.

Aphillanthes *Linn. ſp. pl.* 294.

Aphillanthes Monſpelienſium *Lob. adv.* 190.

Arbutus caule erecto, foliis glabris ſerratis, baccis polyſpermis *Linn. ſp. pl.* 395.

Arbutus folio ſerrato *C. B. pin.* 460.

Abunde in montibus ſeptem Fratrum.

Arenaria foliis filiformibus, ſtipulis membranaceis vaginantibus *Linn. ſp. pl.* 423.

Alſine ſpergulae facie minor, ſeu ſpergula minor ſub caeruleo flore *C. B. pin.* 251.

Aristolochia foliis cordatis ſubſeſſilibus, obtuſis, caule infirmo, floribus ſolitariis *Linn. ſp. pl.* 962.

Ariſtolochia rotunda flore ex purpura nigro *C. B. pin.* 307.

Provenit in agro di Siurgius.

Arum a caule foliis cordato-oblongis, ſpatha bifida, ſpadice incurvo *Linn. ſp. pl.* 966.

Ariſarum latifolium *Cluſ. hiſt.* 2. *p.* 73.

Circa Calarim, & *in agro* S. Pantaleonis.

Asphodelus caule nudo, foliis ſtrictis ſubulatis ſtriatis ſubfiſtuloſis *Linn. ſp. pl.* 309.

Aſphodelus minor *Cluſ. hiſt.* 1. *p.* 197.

Asphodelus caule nudo, foliis enſiformibus carinatis laevibus *Linn. ſp. pl.* 310.

Aſphodelus albus ramoſus mas *C. B. pin.* 28.

Aſphodelus albus non ramoſus *C. B. pin.* 28.

Bartsia foliis ſuperioribus alternis ſerratis, floribus lateralibus *Linn. ſp. pl.* 602.

Alectorolophos italica luteo-pallida *Barrel. rar. ic.* 665.
BARTSIA foliis oppositis lanceolatis obtuse serratus *Linn. sp. pl.* 602.
Trixago apula unicaulis *Col. ecphr.* 1. *p.* 199.
BULBOCODIUM foliis lanceolatis *Linn. sp. pl.* 294.
Colchicum vernum Hispanicum *C. B. pin.* 69.
Prope oppidum Ulassay *secus torrentem*.
BUFONIA *Linn. sp. pl.* 123.
Herniaria angustissimo gramineo folio erecta *Magn. hort.* 97.
BUNIAS siliculis ovatis laevibus ancipitibus *Linn. sp. pl.* 670.
Eruca maritima Italica siliqua hastae cuspidi simili *C. B. pin.* 99.
In sabulosis mari proximis, & maxime stagnis exsiccatis.
BUPLEURUM involucellis pentaphillis acutis: universali diphillo, foliis lanceolatis petiolatis *Linn. sp. pl.* 237.
Bupleurum folio subrotundo sive vulgatissimum C. *B. pin.* 278.
BUPLEURUM caule dichotomo subnudo, involucris minimis acutis *Linn. sp. pl.* 238.
Bupleurum folio rigido *C. B. pin.* 278.
Utrumque inter segetes agri di Sardara.
BUPHTHALMUM calycibus acute foliosis, ramis alternis, foliis lanceolatis amplexicaulibus integerrimus *Linn. sp. pl.* 903.
Aster luteus foliis ad florem rigidis *C. B. pin.* 266.
CAMPANULA caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis *Linn. sp. pl.* 169.
Erini seu rapunculi minimum genus *Col. phytob.* 122.
CAPPARIS aculeata *Linn. sp. pl.* 503.
Capparis spinosa fructu minore, folio rotundo *C. B. pin.* 480.
Rupes circa Calarim *inhabitat.*
CELTIS foliis ovato-lanceolatis *Linn. sp. pl.* 1043.
Lotus fructu cerasi *C. B. pin.* 447.

CENTAUREA calycibus laevibus, ſquammis ovatis mucronatis, foliis ciliato-ſpinoſis.

Caulis erectus, ſtriatus, ramoſus, durus, pedalis, aut paullo elatior ramis unico flore terminatis.. Folia prima dentato-lyrata; reliqua integra, lineari-lanceolata: omnia denticulis ſpinulas exerentibus, & pinnatis inſtructa, erecta, firmula, glabra. Flos luteus. Calix ex ſquammis laevibus, arcte imbricatis, in ſpinulam brevem abeuntibus.

CERASTIUM floribus pentandris petalis integris *Linn. ſp. pl.* 439.

CISTUS arboreſcens, foliis ſeſſilibus utrinque villoſis rugoſis, inferioribus ovatis baſi connatis; ſummis lanceolatis *Linn. ſp. pl.* 514.

Ciſtus mas anguſtifolius *C. B. pin.* 464.

CISTUS arboreſcens, foliis oblongis tomentoſis incanis ſeſſilibus ſupra avenis, alis nudis *Linn. ſp. pl.* 524.

Ciſtus mas, folio oblongo incano *C. B. pin.* 464.

CISTUS arboreſcens, foliis ovatis petiolatis utrinque hirſutus, alis nudis *Linn. ſp. pl.* 524.

Ciſtus foemina folio ſalviae *C. B. pin.* 464.

CISTUS herbaceus exſtipulatus, foliis oppoſitis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. ſp. pl.* 526.

Helianthenum flore maculoſo *Col. ecphr.* 2. *p.* 78.

Omnes hi ciſti ſicca paſcua amant, & abunde naſcuntur circa Oppidum Villanova Tullo.

CLEMATIS cirrhis ſcandens *Linn. ſp. pl.* 544.

Clematis peregrina foliis pyri inciſis: nunc ſingularibus, nunc ternis *Tourneſ. cor.* 20.

CLYPEOLA ſiliculis unilocularibus monoſpermis *Linn. ſp. pl.* 652.

Jonthlaſpi minimum ſpicatum lunatum *Col. ecphr.* 1. *p.* 281.

CONVOLVULUS foliis ſagittatis utrinque acutis, pedunculis unifloris *Linn. ſpec. pl.* 153.

Convolvulus minor arvenſis *C. B. pin.* 294.

CONVOLVULUS foliis sagittatis postice truncatis, pedunculis unifloris *Linn. sp. pl.* 156.

Convolvulus major albus *C. B. pin.* 294.

CONVOLVULUS foliis palmatis cordalis sericeis: lobis repandis, pedunculis bifloris *Linn. sp. pl.* 156.

Convolvulus argenteus folio altheae *C. B. pin.* 194.

CRITHMUM foliolis lanceolatis carnosis *Linn. sp. pl.* 246.

Crithmum, seu foeniculum maritimum minus *C. B. pin.* 288.

Ad rupes, quæ mare spectant.

CROTON foliis rhombeis repandis, capsulis pendulis, caule herbaceo *Linn. sp. pl.* 1004.

Ricinoides, ex qua paratur Tournesol Gallorum *Tourn. Nissole act. Paris.* 1712. *p.* 337.

Abunde in arvis.

CYCLAMINUS foliis cordatis acutis angulose dentatis.

Cyclamen folio anguloso *C. B. pin.* 308.

Ubique in celsis montibus.

Folia tenuiora, quam in vulgari cyclamino, & ampliora angulis, seu dentibus brevissima spinula notatis. Corolla purpurea retroflexa.

CYNOSURUS paniculae spiculis sterilibus pendulis ternatis; floribus aristatis *Linn. sp. pl.* 73.

Gramen panicula pendula aurea *C. B. the.* 33.

CYTISUS floribus lateralibus, foliis hirsutis, caule erecto striato *Linn. sp. pl.* 740.

Cytisus monspessulanus medicae folio, siliquis dense congestis, & villosis *Tournef. inst.* 648.

DAPHNE floribus sessilibus aggregatis axillaribus, foliis ovatis utrinque pubescentibus norvosis *Linn. sp. pl.* 356.

Thymelaea foliis candicantibus, & serici instar mollibus *C. B. pin.* 463.

Abunde circa Ulassay.

DRABA caule non ramoso, foliis cordatis acutis dentatis sessilibus.

Cau-

Caulis ſimpliciſſimus, pedalis, in lungo racemo floriger. Folia piloſo-hiſpida acute terminata, & acutis dentibus praedita, non amplexicaulia.

ERICA antheris bicornibus incluſis, corollis companulatis longioribus, foliis quaternis patentiſſimis, caule ſubarboreo tomentoſo *Linn. ſp. pl.* 353.

Erica maxima alba *C. B. pin.* 485.

ERVUM pedunculis ſubbifloris, ſeminibus globoſis quaternis *Linn. ſp. pl.* 738.

Vicia ſegetum ſingularibus ſiliquis glabris *C. B. pin.* 345.

ERYNGIUM foliis radicalibus ſubrotundis plicatis ſpinoſis, capitulis pedunculatis *Linn. ſp. pl.* 233.

Eryngium maritimum *C. B. pin.* 386.

ERYNGIUM foliis radicalibus planis quadratis ſublobatis, caulinis digitatis, pedunculo terminali.

Eryngium capitulis pſillii *Bocc. rar.* 88.

Copioſe in paſcuis.

Radix tuberoſa obſcura, ex qua folia plura longe petiolata plana dentato-ſpinoſa, quadrato-orbiculata nunc integra, nunc ſubtriloba. Prima caulina profundius triloba, aut quinqueloba, adhuc petiolata; quae, ſequuntur, ſeſſilia, quinquedigitata foliolis lineari-lanceolatis, & ciliato-ſpinoſis. Ex ſummis foliorum alis, aut ſumma planta pedunculus floriger cum uno, alterove ſeſſili folio.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma involucellis lanceolatis, foliis linearibus *Linn. ſp. pl.* 456.

Tithymalus ſive eſula exigua *C. B. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella ſubquinquefida ſimplici, involucellis ovatis: primariis triphillis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoſo *Linn. ſp. pl.* 457.

Tithymalus maritimus ſpinoſus *C. B. pin.* 291.

In monte Eſterſili *frequens.*

FERULA foliolis linearibus longiſſimis ſimplicibus *Linn. ſp. pl.* 247.

Ferula

Ferula femina Plinii *C. B. pin.* 148.

FUMARIA ſubcirrhoſa ex alis florigera, ſegmentis foliorum bilobis, pericarpiis rotundis monoſpermis.

Abunde circa Calarim.

Caules erecti, ſpithamaei, ſuclati, laeves, ramoſi extremis ramis quandoque in cirrhum definentibus. Folia petiolata, glauca, profunde, & inaequaliter trifida ſegmentis bilobis ovalibus cum ſpinula, alterna, ſed ad ramorum ortum oppoſita. Floralium ſegmentum unum ſaepe bilobum, reliqua integra ſunt. Nudus pedunculus foliis altior flores fert fumariae officinalis in brevem ſpicam congeſtos.

GALIUM foliis quaternis ovatis, aculeato-ciliatis, ſeminibus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 108.

Rubia ſemine duplici hiſpido latis, & hirſutis foliis *Bocc. rar.* 6.

Folia glabra, vix nervoſa. Panicula axillaris cauli perpendicularis.

GALIUM foliis quaternis ovatis laevibus obtuſis, panicula dichotoma, ſeminibus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 108.

Rubia quadrifolia ſemine duplici hiſpido *Bauh. hiſt.* 3. *p.* 718.

GALIUM foliis verticillatis lineari-ſetaceis, pedunculis folio longioribus *Linn. ſp. pl.* 107.

Galium nigro-purpureum montanum tenuifolium *Col. ecphr.* 1. *p.* 298.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis ſublobatis *Linn. ſp. pl.* 680.

Geranium folio altheae *C. B. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphillis, floribus pentandris, foliis pinnatis acutis ſinuatis *Linn. ſpec. pl.* 680.

Geranicum acu longiſſima *C. B. pin.* 319.

GERA-

GERANIUM pedunculis bifloris, calycibus pyramidatis angulatis rugosis, foliis quinquelobis rotundatis *Linn. spec. pl.* 682.

Geranium lucidum saxatile *C. B. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis bifloris, foliisque rameis alternis, caule ramoso diffuso, calycibus muticis *Linn. sp. pl.* 682.

Geranium columbinum villosum petalis bifidis purpureis *Vaill. Paris.* 79. *t.* 15. *f.* 3.

GERANIUM pedunculis bifloris, foliis quinquepartito-multifidis angulatis: laciniis acutis, capsulis glabris, calycibus aristatis *Linn. sp. pl.* 682.

Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculo longissimo, caule prostrato *Hall. helv.* 367.

GENTIANA dichotoma, ramis unifloris, corollis quinquefidis infundibuli-formibus, calycibus membranaceis.

Centaurium luteum novum *Col. ecphr.* 2. 77.

Caules ad summum spithamaei, subrotundi, glabri. Folia sessilia, opposita, ovata. Caules irregulariter dichotomi semel, aut bis. Corolla lutea segmentis ovato acutis, & tubo calycem superante. Tubi longitudo bis, & ultra corollae limbum metitur. Calix decem striatus, membranaceo-transparens segmentis capillaribus.

GLADIOLUS foliis ensiformibus, floribus distantibus *Linn. sp. pl.* 36.

Gladiolus floribus uno versu dispositis *C. B. pin.* 41.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus *Linn. sp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum nostras sthoechadis citrinae foliis tenuissimis *Pluk. alm.* 172. *t.* 298. *f.* 2.

GNAPHALIUM caule simplicissimo, foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo composito terminali.

Circa oppidum Villanova Tullo.

Tomentosa stirps est palmaris altitudinis. Folia subvirent erecta, mollia, ambitu minutim & inaequaliter denticulaco. Flo-

Flores rotundi parvi ex citrino, & viridi ſubrubentes in denſum corymbum conglobati.

GYPSOPHILA foliis mucronatis recurvatis, floribus aggregatis *Linn. ſp. pl.* 406.

Caryophillus ſaxatilis, ericae foliis umbellatis corymbis *C. B. pin.* 211.

In promontorio S. Eliae *circa* Calarim.

HERNIARIA hirſuta *Bauh. hiſt.* 3. *p.* 379.

HESPERIS caule erecto ramoſo, foliis cordatis amplexicaulibus ſerratis villoſis *Linn. ſp. pl.* 664.

Leucojum minus rotundifolium flore purpureo *Barrel. ic.* 876.

HELIOTROPIUM foliis ovatis tomentoſis integerrimis rugoſis, ſpicis conjugatis *Linn. ſp. pl.* 130.

Heliotropium majus Dioſcoridis *C. B. pin.* 253.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis occultatis, capitulis terminalibus, caule erecto *Linn. ſp. pl.* 207.

Paronychia narbonenſis erecta *Tournef. inſt.* 508.

JUNIPERUS foliis quaternis patentibus ſubulatis mucronatis *Linn. ſp. pl.* 207.

Juniperus major bacca refuſcente *C. B. pin.* 489.

JUNIPERUS foliis oppoſitis erectis decurrentibus oppoſitionibus pixidatis *Linn. ſp. pl.* 1039.

Sabina folio cupreſſi *C. B. pin.* 487.

LAGURUS ſpica ovata *Linn. ſp. pl.* 81.

Gramen alopecuroides ſpica rotundiore *C. B. the.* 56.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis diphillis, leguminibus ovatis compreſſis: dorſo canaliculatis *Linn. ſpec. pl.* 740.

Lathyrus ſativus flore purpureo *C. B. pin.* 344.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphillis, ſtipulis ſagittato-cordatis *Linn. ſp. pl.* 279.

Vinea lutea foliis convolvuli minoris *C. B. pin.* 345.

LAPSANA calycibus fructus toruloſis depreſſis obtuſis ſeſſilibus *Linn. ſp. pl.* 811.

Chon-

Chondilla verrucaria foliis cichorii viridibus *C. B. pin.* 130.
Ubique ad vias.
LAPSANA calycibus fructus undique patentibus: radiis ſubulatis, foliis lyratis *Linn. ſp. pl.* 812.
Rhagadiolus lapſanæ foliis *Tournef. cor.* 36.
LINUM calycibus acuminatis, foliis lanceolatis ſparſis ſtrictis ſcabris acuminatis, caule tereti baſi ramoſo *Linn. ſp. pl.* 278.
Linum ſylveſtre caeruleum folio acuto *C. B. pin.* 214.
LINUM calycibus acutis, foliis lineari lanceolatis alternis; paniculae pedunculis bifloris *Linn. ſp. pl.* 279.
Linum ſylveſtre minus flore luteo *C. B. pin.* 214.
In paſcuis S. Pantaleonis.
LINUM calycibus, foliiſque lanceolatis ſtrictis mucronatis: margine ſcabris *Linn. ſp. pl.* 279.
Lithoſpermum linariae folio monſpelienſium *C. B. pin.* 259.
LOTUS capitulis aphillis, foliis ſeſſilibus quinatis *Linn. ſp. pl.* 776.
Dorychnium monſpelienſium *Lob. ic.* 51.
LUPINUS calycibus alternis appendiculatis: labio ſuperiore bipartito, inferiore integro *Linn. ſp. pl.* 721.
Lupinus anguſtifolius caeruleus elatior *Ray hiſt.* 908.
MOLLUGO foliis quaternis obovatis, panicula dichotoma *Linn. ſp. pl.* 89.
Anthillis marina alſinefolia *C. B. pin.* 282.
MYOSOTIS ſeminibus nudis: foliorum apicibus calloſis *Linn. ſp. pl.* 131.
Echium ſcorpioides paluſtre *C. B. pin.* 254.
OENANTE umbellularum pedunculis marginalibus longioribus ramoſis maſculis *Linn. ſp. pl.* 254.
Oenanthe prolifera apula *C. B. pin.* 163.
ONONIS trifolia viſcoſa, hirſuta, pedunculis congeſtis, floribus pendulis *Sauv. monſp.* 190.

Anonis pusilla villosa, & viscosa purpurascente flore *Tourn. inst.* 408.

Folia cuneiformia in apice denticulata, trifoliata; sed floralia simplicia. Stipulae lanceolatae, non setaceae. Spicae ramos, & caulem terminant. Flores ex alis stipularum prodeunt singulares. Pedunculus petiolo longior. Flos calyce minor reflexus. Fructus longitudine calycis: semina nigra angulata decem circiter.

Ononis pedunculis unifloris filo terminatis, foliis simplicibus *Linn. sp. pl.* 718.

Anonis lutea viscosa latifolia minor, flore pallido *Barrel. ic.* 1239.

Anonis viscosa spinis carens lutea latifolia annua *Magn. monsp.* 21.

Folia brevis petioli ope insidentia retangulae stipulae, orbiculata, aut oblonga, minutim denticulata. Pedunculi uniflori, axillares, stipula longiores, terminati filo folia superante. Flos pentaphillo calyce minor. Fructus longior calyce, aequalis stipulae semina recondit tria, aut quatuor reniformia. Planta tota villosa est.

Ornithopus foliis pinnatis, leguminibus subarcuatis *Linn. sp. pl.* 743.

Ornithopodium minus *C. B. pin.* 350.

Othonna foliis pinnatifidis tomentosis: laciniis sinuatis; caule fruticoso *Linn. sp. pl.* 927.

Jacobaea maritima *C. B. pin.* 131.

Ad maris littus abunde.

Passerina foliis carnosis extus glabris, caulibus tomentosis *Linn. sp. pl.* 559.

Thymelaea tomentosa foliis sedi minoris *C. B. pin.* 463.

Phillyrea foliis cordato-ovatis serratis *Linn. sp. pl.* 8.

Phillyrea folio leviter serrato *C. B. pin.* 476.

Plantago foliis lineari-lanceolatis hirsutis, spica cylindrica erecta, scapo tereti foliis longiore *Linn. sp. pl.* 114.

Flo-

Holosteum hirsutum albicans minus *C. B. pin.* 190.

PLANTAGO caule ramoso, foliis integerrimis, spicis foliosis *Linn. sp. pl.* 115.

Psyllium majus erectum *C. B. pin.* 191.

PLUMBAGO foliis amplexicaulibus *Linn. sp. pl.* 151.

Lepidium dentellaria dictum *C. B. pin.* 197.

POLYGONUM floribus pentandris trigynis axillaribus, foliis lanceolatis, caule stipulis obtecto fruticoso *Linn. sp. pl.* 361.

Polygonum maritimum latifolium *C. B. pin.* 280.

POLYPODIUM fronde bipinnata: pinnis lunulatis dentatis, stipite strigoso *Linn. sp. pl.* 1090.

Filix aculeata major *C. B. pin.* 358.

POTERIUM inerme caulibus subangulosis *Linn. sp. pl.* 994.

Pimpinella sanguisorba minus hirsuta *C. B. pin.* 160.

POTERIUM spinis ramosis *Linn. sp. pl.* 994.

Poterio affinis, foliis pimpinellae, spinosa *C. B. pin.* 388.

Abunde circa Calarim.

PSORALEA foliis omnibus ternatis: pedunculis spicatis folio longioribus *Linn. sp. pl.* 763.

Trifolium bitumen redolens *C. B. pin.* 327.

Ubique circa Calarim.

QUERCUS foliis ovato-oblongis indivisis, serratisque, cortice integro *Linn. sp. pl.* 995.

Ilex oblongo serrato folio *C. B. pin.* 424.

Ubique frequens.

QUERCUS foliis ovato-oblongis indivisis serratis subtus tomentosis, cortice rimoso fungoso *Linn. sp. pl.* 995.

Suber latifolium sempervirens *C. B. pin.* 424.

QUERCUS foliis ovatis indivisis spinoso-dentatis glabris *Linn. sp. pl.* 995.

Ilex aculeata cocciglandifera *C. B. pin.* 425.

Abunde loco dicto Pedra de Fogu.

RESEDA foliis lanceolatis integris, calycibus quadrifidis *Linn. ſp. pl.* 448.
Luteola herba ſalicis folio *C. B. pin.* 100.
RESEDA foliolis alternis integerrimis, fructibus tetragynis.
Reſeda minor inciſis foliis *Barrel. ic.* 587.
Reſeda foliis calcitrapae flore albo *Mor. hort. bleſ.*
RUBIA foliis ſenis *Linn. ſp. pl.* 109.
Rubia ſylveſtris aſpera *C. B. pin.* 33.
RUMEX floribus hermaphroditis, valvulis dentatis nudis reflexis *Linn. ſp. pl.* 336.
Acetoſa ocymi folio Neapolitana *C. B. pin.* 114.
RUMEX floribus dïoicis, foliis lanceolato-haſtatis *Linn. ſp. pl.* 338.
Acetoſa arvenſis lanceolata *C. B. pin.* 114.
SAGINA caule erecto unifloro *Linn. ſp. pl.* 128.
Alſine verna glabra *Vaill. pariſ.* 6. *t.* 3. *f.* 2.
SAXIFRAGA foliis caulinis palmato-lobatis, caulinis ſeſſilibus, caule ramoſo bulbifero *Linn. ſp. pl.* 403.
Saxifraga bulboſa altera bulbifera montana *Col. ecphr.* 1. *p.* 318.
SCANDIX ſeminibus ovatis hiſpidis, corollis uniformibus, caule laevi *Linn. ſp. pl.* 257.
Myrrhis ſylveſtris aequicolorum *Col. ecphr.* 1. *p.* 110.
SCANDIX ſeminibus ſubulatis, hiſpidis, floribus roſtratis, caulibus laevibus *Linn. ſp. pl.* 257.
Scandix cretica minor *C. B. pin.* 152.
SCROPHULARIA, foliis difformibus, pedunculis axillaribus aggregatis *Linn. ſp. pl.* 620.
Scrophularia foliis laciniatis *C. B. pin.* 236.
SCROPHULARIA foliis cordatis: ſuperioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris *Linn. ſp. pl.* 621.
Scrophularia urticae folio *C. B. pin.* 236.
SERAPIAS bulbis ſubrotundis, nectarii labio trifido acuminato petalis longiore *Linn. ſp. pl.* 950.

Or-

Orchis montana italica flore ferrugineo, lingua oblonga *B. C. pin.* 84.

SHERARDIA foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus *Linn. ſp. pl.* 102.

Rubeola arvenſis repens caerulea *C. B. pr.*

SILENE hirſuta, petalis emarginatis, fructibus erectis alternis hirſutis ſeſſilibus *Linn. ſp. pl.* 417.

Viſcago ceraſtei foliis, vaſculis erectis ſeſſilibus *Dill. elth.* 416. *t.* 309.

SISON foliis caulinis ſubcapillaribus *Linn. ſp. pl.* 252.

Arumi parvum foliis foeniculi *C. B. pin.* 159.

SPARTIUM foliis ternatis, ramis angulatis ſpinoſis *Linn. ſp. pl.* 709.

Acacia trifolia *C. B. pin.* 392.

TAXUS foliis approximatis *Linn. ſp. pl.* 1040.

Taxus *C. B. pin.* 505.

Occurrit in agro Ulaſſey; *de caetero rarus.*

TEUCRIUM foliis integerrimis ovatis utrinque acutis, racemis ſecundis villoſis *Linn. ſp. pl.* 564.

Marum cortuſi *J. B. p.* 242.

TEUCRIUM . . . .

Polium maritimum erectum monſpeliacum *C. B. pin.* 221.

Polium monſpeſſulanum *J. B.* 3. 299.

THLASPI ſiliculis ſubrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis ſubſerratis *Linn. ſp. pl.* 646.

Thlaſpi arvenſe perfoliatum majus *C. B. pin.* 106.

THYMUS erectus, foliis revolutis ovatis, floribus verticillato-ſpicatis *Linn. ſpec. pl.* 591.

Thymus vulgaris folio latiore *C. B. pin.* 219.

Frequens circa Calarim.

TORDYLIUM umbella conferta, foliolis ovato-lanceolatis pinnatifidis *Linn. ſp. pl.* 241.

Caucalis ſemine aſpero, floſculis rubentibus *C. B. pr.* 80.

Ad foſſas prope oppidum Gerey.

TOR-

TORDYLIUM umbellis ſimplicibus ſeſſilibus, ſeminibus exterioribus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 240.

Caucalis nodoſa echinato ſemine *C. B. pr.* 80.

Ibidem.

TORDYLIUM alterum majus λειοκαρπος *Col. ecphr.* 122.

TRIFOLIUM ſpicis villoſis ovalibus, dentibus calycinis ſetaceis aequalibus *Linn. ſp. pl.* 768.

Trifolium arvenſe humile ſpicatum, ſive Lagopus *C. B. pin.* 328.

TRIFOLIUM ſpicis ovalibus imbricatis, vexillis deflexis perſiſtentibus, calycibus nudis, caule erecto *Linn. ſp. pl.* 772.

Trifolium agrarium *Dod. pemp.* 576.

TRIFOLIUM caulibus ſimplicibus, ſpicis piloſis aphillis mollibus ſubrotundis, foliolis cordatis.

Trifolium alopecurum ſpica globoſa *Barrel. ic.* 1188.

Caules rotundi, villoſi, ſpithamaei. Stipula ampla in duos lobos quadrato-ovales denticulatos diviſa educit petiolum biunciale, quod jungit tria foliola denticulata, ex cuneiformi cordata, oxalidi *ſimilia. Spica ſubrotunda, compreſſa, terminalis. Calyces ſtriati, ſericeo villoſi. Dentes calycini ſubaequales patentes, & tubo calycis longiores. Flos polypetalus calyci ſubaequalis.*

TURRITIS foliis omnibus hiſpidis, caulinis amplexicaulibus *Linn. ſp. pl.* 666.

Eryſimo ſimilis hirſuta non laciniata alba *C. B. prodr.* 42.

VERONICA floribus ſolitariis, foliis cordatis inciſis pedunculo longioribus *Linn. ſp. pl.*

Alſine veronicae foliis, floſculis cauliculis adhaerentibus *C. B. pin.* 250.

VERONICA floribus ſolitariis, foliis cordatis planis quinquelobis *Linn. ſp. pl.* 13.

Alſine hederulae folio *C. B. pin.* 250.

VIBURNUM foliis integerrimis ovatis: ramificationibus ſubtus villoſo-glanduloſis *Linn. ſp. pl.* 267.

Lau-

Laurus ſylveſtris corni foeminae foliis ſubhirſutis *C. B. pin.* 461.

Vicia pedunculis multifloris, foliolis reflexis ovatis mucronatis, ſtipulis ſubdentatis *Linn. ſp. pl.* 734.

Vicia maxima dumetorum *C. B. pin.* 385.

Vicia leguminibus ſeſſilibus ſubbinatis erectis, foliis retuſis, ſtipulis notatis *Linn. ſp. pl* 736.

Vicia ſativa vulgaris ſemine nigro *C. B. pin.* 344.

Viola acaulis foliis cordatis, ſtolonibus reptantibus *Linn. ſp. pl.* 935.

Viola martia purpurea flore ſimplici odoro *C. B. pin.* 119.

Rara in Sardinia *planta creſcit in agro* Hierſu.

De Glandulosʃo ovarii corpore, de Utero gravido, & placenta.

OBSERVATIONES
AMBROSII BERTRANDI.

VEteres Anatomici obſervationibus deſtituti de generationis opere parum, aut nihil intellexerunt; atque in ſumma rei obſcuritate poſteros vix aliquid eſſe intellecturos, niſi potius modos operis ſequantur, pene deſperandum eſt; Harvejus hanc methodum primus amplificavit, quam ipſe quum ſequerer non nullas obſervationes cumulare contigit, quas modo nudas exponam. Primae inſtitutae ſunt circa corpora ovariorum, ut vocant glanduloſa; neque de his, quae ſatis vulgaria ſunt, tranſcribam. Quaerebant Phyſiologi non nulli, an in virginibus intemeratis comperirentur, nec ita facile, atque conſtanter reſpondebant Anatomici. Santorinus vero per conjecturam rem adeo invexit, ut virginum morbos aliquos uteri a praecoci, & vehementi ipſorum intumeſcentia repetendos eſſe exiſtimaverit. Cl. Morgagnius rem maxime cohibuit, ut nullum hujuſmodi corpus in virginibus, quod cum iis nuptarum comparari poſſet, numquam obſervaviſſe ſcripſerit (in epiſt. ad me dat. die XIII. Novembr. 1749.) Ego vero in puellis a decimo quarto ad vigeſimum annum, quas non magis tranſactae vitae genus, quam partium genitalium intemerata integritas, & plenitudo virgines deceſſiſſe indicabant, in ovariis ſtigmata, ſeu granula quaedam obſervavi, quae corporum glanduloſorum rudimenta referrent; in aliis porro adeo perfecta, & turgentia vidi, ut totam amplitudinem ſuam acquiſiviſſe facile putarem; imo in robuſta, & ſucciplena puella hujuſmodi corpus inveni, cujus papilla gan-

gangraena esset correpta, idque totum sanguine atro oppletum.

Corpora hujusmodi glandulosa in puellis veluti in masculis semen excitare crediderim; vesiculae seminales in his dilatantur, semineque recens affluente replentur ad XII., vel XIV. vitae annum magis, vel non ita cito, eo quidem tempore, quo ephoebi pubertatem attingunt, nutritionis materia ultra corporis incrementi rationem in his tunc redundante, atque in prolificum semen evadente, siquidem nutritio, & generatio, idem pene naturae opus sint: Malpighius frequentissime in vitulis nuper natis unam, aut alteram vesiculam insignem deprehendisse scripsit, cui lutea substantia graminis instar adnascebatur; ego vero in animantibus hujus generis, atque aetatis flavescere vidi, non autem veluti adoriente lutea substantia, sed potius tinctura, quae facile abstergeretur, aut equidem solidam substantiam non comperi, quam veluti lutei corporis rudimentum asseverare possem, nec porro vesiculas adeo insignes in his potui deprehendere; asperam, leviterque tuberosam sentiebam ovarii superficiem, vesiculas non satis bene distinguebam. Nihilo secius veluti florum uterum undique, & in solido crescere hujusmodi corpora ostendam, si primum qualia sint, quando plena, perfectaque inveniuntur, indicavero.

Glandem referunt, quae profunde in ovario infixa papillam ad ejusdem superficiem porrigit, veluti segmentum minoris spherae majori appositum, & acretum: mammae papillae comparaveris; hujusmodi papilla saepius bene devoluta, terminataque videtur, alias nulla est, atque glandis ipsa convexitas aliqua parte protuberat, alias verrucam excisam, minus bene per ambitum terminatam inveniebam. Ovarium in transversum ovatum, anterius, posteriusque compressum est; ad latus externum, ut plurimum germinat corpus luteum, etsi in quacumque parte itidem inveniatur;

 niatur;

niatur; in Vacca frequentiſſime maximam ovarii partem occupat, totum occupaſſe non ſemel vidi; in humanis ciceris, aut mediocris fabae craſſitiem non raro excedit, in illis olivam refert, aut ceraſum majus, in pecude, aut ſcropha humanorum amplitudinem ſequitur, aut parum ſuperat.

Simplex, & unum ut plurimum eſt, rariſſime duo in eodem ovario, aut unum in utroque reperitur. At vero, quum praeſens fuerit amplum, plenumque corpus luteum, alia minora quandoque occurrunt circumſcripta, terminataque, vel tanquam, quod magis raro vidimus, majoris continuatas appendices; rariſſime non invenimus maculas obſcuras cinereas ſubluteas, vel etiam nitide croceas profunde reconditas, aut veluti granula, aut papulas, quae mox ſub ovarii tunica tranſparebant, aut etiam turgebant; in beſtiis corpus luteum plenum, perfectumque perpetuo in eo reperiebatur ovario, quod ex latere eodem erat cornu gravidi, atque licet multiparae ſint, numerus tamen luteorum corporum nequaquam ex embryonum numero eſt.

Tunicam habent ſat craſſam, renitentemque, quae vaſculis plurimis ſanguineis obducitur, eaque ſpermaticorum, uterinorumque fuiſſe ſoboles comperimus; venae magis, quam in aliis corporis partibus arteriarum amplitudinem excedunt. Exterius communi ovarii tunica, quae tenuvior fit, obvolvitur, & cooperitur, quae & in id ipſum continuari videtur, circum circum qua parte ovario innititur fibris rubellis, compactis, reticulatis obducitur, quibus illud opus tribuerunt Anatomicorum aliqui, ut premerent, urgerentque ovulum foras e ovario in Fallopianam dictam tubam.

Veſiculas, ſeu ut ajunt, ova corpore glanduloſo increſcente decreſcere, & abſumi ſcripſerunt; ipſe quidem alterum ovarium in corpus luteum evaſiſſe nullis, aut pauciſſimis veſiculis duas veſiculas inſigniter turgentes obſervavi in quodam luteo, ut ita dicam, ovario, alias plures uſque ad viginti, & ultra, etſi corpus luteum non leviter

tur-

turgeret. Vidi non raro, quod tumente altero ovario ob corpus luteum, & veſiculas ſat copioſas, alterum exiguum eſſet, & veluti extenuatum, idque ſaepius contigit: quae in ovario ſunt reliquae veſiculae, luteo ut plurimum adjacent corpori, aliquas vidi, ut ſingula enarrem, ipſi papillae inhaerentes; memorata papilla ſaepiſſimae ad verticem foraminulo, quod uſque in fundum corporis lutei continuatur, ductum ideo, ſeu canalem efformans, perforatur. Hujuſmodi canalis membrana fit ſubcinerea, aut albida, cujus appendices in latera ſparguntur, affiguntur que, ſeu continuantur eidem membranae exteriori corporis lutei. Non autem raro hujuſmodi membrana vix apparet, aut etiam deficere videtur, vel etiam nullo pacto pertuſum obſervatur luteum corpus, etſi per axim exciſum cavitatis, ceu ſinuli, qui niſi potius diſtrahendo fiat, in ipſo, ut ita dicam, parenchimate veſtigium videatur. Quandoque per tubum aëre quodam modo diſtendi poterat corpus luteum, compreſſum liquorem limpidum, mox magis craſſum, ſubcinereum, aut leviter croceum extillabat. Nunquam vero cavitatem adeo patentem, & amplam invenimus, quae piſum poſſet continere, ut aſſeveravit Malpighius.

Hujuſmodi corpus fruſtulis, & quaſi lobulis componi ſcripſerunt, ſtructuram ipſius renibus, ut vocant, ſuccenturiatis comparabant, varicoſis propaginibus lutei corporis conflatam, quaſi adipis minima fruſtula. Dum haec ſcribo pluſquam triginta corpora glanduloſa alia recentia, alia macerata, alia in fruſtula exciſa ob oculos habeo, atque ut potius dydymo comparem analogiae cujuſdam ratione adducor: diviſo itaque per axim verticalem, aut tranſverſim corpore luteo conicas mamillas, ſtrias, ſeu appendices utraque facie planas video, quae ex tota circumferentia obtuſa cuſpide in communem longitudinalem caveam vergant. Hujuſmodi mamillae ex vaſculis tenuiſſimis, molliſſimiſque fiunt, quae criſpata ad invicem per longitudinem cumulantur

lantur

lantur in ipsius mamillae fabricam ; quando vero per corporis lutei longitudinem membranosus ductus protenditur, ille, inquam, expansionibus suis lateralibus mamillas eas firmat, & devincit, ut fila ea, quae a tunica testium albuginea, eorum compagem pervadunt, & fasciculos vasorum seminariorum sustinent, & uniunt; microscopio examinata tenuissima longitudinalia harumce mamillarum fragmenta eamdem, ac ea, quae testium sunt, fabricam quodammodo exhibent, crispata nempe sunt, cava, turgentia, & liquido farcta: injiciens per arteriam spermaticam tenuissimam gummi solutionem in alcohol, seu vernicem, hujusmodi mamillas pervadisse non semel, etsi multa cum difficultate vidimus, atque vasculorum, quae sanguineorum propagines essent, elegantissimae myriades observabantur; hinc ex iis ipsis spermaticis vasculis corpus luteum educi suspicabar, quamquam, si ingenue fatear, usque in ipsa lutea vascula injectionis materiam nunquam penetrasse viderim.

Nonnulli Anatomici in nuper foecundatis phlogosi correpta observaverunt ovaria, eorumque vesiculas. Quid si jam pridem factum fuerit? Non equidem per eam temporis brevitatem excitari adeo facile credimus, tum propterea quod ipse uterus non leviter immutetur. In junioribus ovaria intus intertexta videntur confertissimis vasculorum, ita dicam, manipulis, quae in puellis, quibus mammae sororiari, & caetera pubertatis signa sobolescere incipiunt admodum rubent, & veluti florescunt; nonnullae ipsorum tenuissimae propagines circa vesiculas producuntur; verum e profundo ovarii villi nonnulli lutei germinare videntur, qui graminis adinstar, ut Malpighiana phrasi loquar, vesiculis iis circumducuntur, nec quidpiam referunt, quod cum luteo corpore comparari possit, hinc vero mira celeritate in papillas, seu penicillos luteorum vasculorum cumulantur, quae veluti papulam effingunt, atque illinc vesicula minus apparet, flosculos diceres florescentes, glomerantur, cumulan-

lanturque sensim magis, magisque, atque soliditate non minus, quam amplitudine crescunt.

Vidimus interdum ab aliquo corpore luteo, alteram veluti appendicem, seu apophysim pullulare; non erat alterius corporis nimium producta papilla, ut primum suspicatus eram, at quidem connatum corpus ejusdem structurae, hinc mecum ipse meditabar ex iis, quae primum spectaveram, & ex aliis an vesiculae in hanc massam evaderent, extus, aut intus succrescente luteo tomento, aut recens sine his germinaret. Plenitudo ipsorum, defectus residui folliculi, me in hanc potius trahebant sententiam, tum praesente pleno, perfectoque corpore luteo, alia eorumdem rudimenta vidisse visus sum, quae non ita circum vesiculam, veluti penicilli pulposi imagine germinarent, nec alium germinationis modum referrent, ac flos, aut gemma in plantis. *Ante conceptionem*, inquit Cl. Hallerus *plerumque nascitur, sensim circa vesiculam aliquam ovarii coagulum flavum, saepe a me visum, quod valde auctum, circum natum membranae vesiculae, abire videtur in hemisphericum, acinosum, luteum corpus intus cavum, & in ea cavitate, quantum videtur, continens ovulum, sive membranulam minimam cavam, sedem futuri hominis.* Prim. Lin. Physiol. edit. 2. pag. 545. §. DCCCXXV. Eae Halleri observationes nostras non solum comprobant, imo etiam antecesserunt, neque eas renovare ausus essem, nisi idem Clarissimus Auctor in eodem paragrapho, imo in eadem linea adjunxisset; *quod ea corpora in foemina post conceptum primum adparent*, quam sententiam iterum, atque praecise transcripsit ad finem §. DCCCLVII., quae tamen postrema verba deficiebant in eodem paragrapho primae editionis.

Corpora igitur glandulosa non semper eamdem plenitudinem assequuntur, incrementi vero rationem quamdam tenent; duo aeque perfecta in eodem ovario, aut unum in utroque nunquam invenisse diximus. Incidimus foeminae cada-

cadaver, quae gemellos enixa erat, solitarium globosum, terminatum comperiebamus. Hae moliem suam assequuta turgent, & duriuscula sunt, altera molliora flacidiora; illa intense crocea, vel etiam rubent, atque in his vasculorum ordo nitidior apparet, vasculorum, seu intestinulorum inquam, quae corporis lutei compagem faciunt, altera sublutea, pallida subcinerea, pulpam, cujus structuram non tam facile distinguimus, perhibent. Caeterum per gestationis tempora magis, vel minus celeriter decrescunt, donec in exiguissimam molem evadant, ceu in granula, vel maculas minimas, quae quidem & in provectis mulieribus, quae jam a multis annis utero nihil gestarunt, intense luteae, quandoque apparent; papulae, quas superius memoravimus, praecipue occurrebant, quando praesentis gestationis decresceret, vel praeterita gestatione longe magis decrevisset. Veniamus jam vero ad uterum.

Ipse quoque uterus ad concoeptionem praeparatur: ex veteribus Anatomicis Carolus Stephanus uteri vasa sanguinea describens, haec eadem in papillas, quae Hipocrates *acetabula* nominabat, elongari scripserat, eaque percipi posse, *non solum in praegnantibus, sed etiam in iis, quarum uterus ad suscipiendum semen aptus est*; confirmaverat Harveus, quam rem non modo neglexerunt Anatomici, imo etiam despexerunt. Ego vero jam ab anno MDCCXLVIII. cornua uteri vaccini, tuberculis hic, illic turgentia quandoque videram, quod idem cum saepius, iterumque vidissem, multa enim mihi ipsorum erat copia, non adeo facile morbi genus, quae mihi primum suspicio obvenerat, esse credebam, nam neque durities, neque sordes, aut ulcera morbi suspicionem dabant; cogitavi postea, an acetabula essent, quae per puerperium decrescerent, nam compressa humorem tenuem quidem, atque dilutum, at vero quodammodo lacteum interdum dabant.

Nactus

Nactus ergo multam copiam uterorum pecudum, atque vaccarum, quae marem quidem erant passae, at nunquam evaserant foecundae, subductae porro jam fuerant a mare ab hebdomada, vel etiam mense; in iisdem ea quoque tubercula observare contigit, quorum nonnullis, quae majora essent, delectis post macerationem aliquot dierum in aqua, ejusdem esse structurae, ac corpora glandulosa utero gerentium comperi, idem observavi in cuniculis, quas ipse domi servaveram: papulas primum spongiosas, quando minima sunt, referre videntur, quae quidem papulae novam excitatam fabricam demonstrant, si cum reliqua uteri interna superficie comparentur, rubent, atque in aqua diu maceratae, tubercula videntur spongiosa elegantissimo reticulo tecta, e cujus areolis villi quidam, seu villosa lanugo emergit; reticulum illud cum interna uteri membrana continuari conspicimus; villi e profundo emergunt, neque eadem structura continuatur in reliquis uteri areis (de quadrupedibus loquimur), e quibus nulla eminent acetabula. Hujusmodi reticulum in acetabulis pecudum, quae adinstar calicis sunt excavata, non ad oram, sed non nihil profunde observatur, in vaccis vero in foraminulis spongiosae substantiae intromittitur; atque nisi distrahendo, rumpendoque adesse noscimus.

Bestiae quadrupedes, quae menstrua non patiuntur, si libidine aestuent, sanguinem e vagina extillant, atque catula aestu libidinoso furens, neque dum a mare compressa sanguinem sat copiosum emittebat; itemque in ejus utero per varia cornuum loca septem distinctissima, variaeque amplitudinis corpuscula inde repereram, quae acetabulorum rudimenta viderentur, mollia erant, spongiosa, rubella, e quibus tamen serum potius lactescens pressione exprimebatur; vasa ad ea corrivabant sanguine turgida, in iisque confundebantur.

In

In mulieribus, priusquam concoeperint, nihil profecto hujusmodi observavisse ingenuus fateor; Clarifs. Morgagnius sinus demonstravit, e quibus sanguis menstruus extillaret; eos ampliores utpote sanguine turgidos, instantibus catameniis, semper comperimus, atque compresso utero potius per oblongos hiatus, quam per vasculorum foramina sanguinem exstillare observavimus; rubet, turget uterus ob aestum venereum, nihil ultra immutatum ante conceptum revera vidimus. Porro tamen propria vi mutari ex eo deducimus, quod cum non semel mulieres aperiremus, quae primis graviditatis hebdomadibus obierant, etsi ovum utero nullibi adhuc dum adhaereret, nihilo tamen minus, alicubi magis turgere uterum, & sinus magis patulos, longius productis tumidis labris, observabamus, ceu veluti designatum locum, ubi placenta tandem infigi, & adhaerere deberet. Idem observavimus in utero vacuo cum conceptus esset in tuba sinistra, ut, inquam, propria vi immutari uterum dicamus, ceu non ex solo placentae contactu. Erat in eo loco pusillus foetus, turgebat tuba crassis parietibus, atque vasis summe turgidis circumdabatur; uterus porro triplo erat naturali major, rubellus, turgidus, atque ad eum locum, ubi tuba illius lateris insinuabatur, per tres digitos transversos magis erat tumidus, atque in superficie interna sinus satis patulos habebat productis labellis crassis, atque non nihil tumidis. Longe tumidae erant arteriae spermaticae, atque instituta injectione, ceram plenis rivulis in uteri tumidi sinus penetrasse observavimus, quum eae arteriae, quando mulieres nihil in utero habent, ad eum tota naturali diametro perveniant, angustentur inde, ut tenuissimae in uteri substantia intercipiantur. Quid porro? foeminae nonnisi post purgationem concipiunt, atque si cesset, non amplius foecundae evadunt; mulieres ultra quinquagesimum annum menstruantes pepererunt, praecoces hujusmodi purgationes in puellis praecoces reddunt foecundationes.

Har-

Harveus mucoſa filamenta deſcribit , quae ab ultimo , ſeu ſuperiore cornuum angulo ducta , ſimulque inde juncta, membranoſam , ac mucilaginoſam tunicam , ſeu , ut ajunt manticam , vacuam vero , ceu nullo occupatam embryone efficerent . Equidem embryonis membranas tamquam ex muco compaginari ampliſſimis Anatomicorum obſervationibus ediximus. Semel in ſcropha, in qua luculenta occurrebant uteri acetabula, mucoſam , ſanguinolentam telam obſervaveram , per totam uteri amplitudinem perfuſam , nec ullam minimam compactam ſubſtantiam , quae pro embryone, vel minimo ſumi poſſet , occludentem; in aqua neque ſolvebatur, & adinſtar membranae natabat, & expandebatur facillime citra rupturam , craſſam , mucoſam , ſpongioſamque telam dixiſſes, quae paſſim rubebat papulis, ſeu maculis ſanguineis. Etſi per quam attentum in hujus uteri anatome me praeſtiterim , non potius Harvei obſervationem confirmare intendo , quam Anatomicorum diligentiam excitare , ut in iiſdem inſiſtant ; Harveus enim tanta obſervandi opportunitate , atque diligentia obſervationes ſuas adauxit, ut hae negligi quidem non debeant ; atque ut ipſe fatear quod recogito , poſtremae , quas in ovibus, & vaccis inſtitui obſervationes , a communi ſententia me non leviter deturbarunt , ut generationem multiplici patium apparatu promoveri, foveri, & perfici crediderim; dubium obſervationes excitarant ; eaedem aliquando fortaſſe abſolvent , ſi porro operis modos ſequamur .

Equidem placenta, quam partem organicam tandem conſpicimus veluti ex muco fit. Primis geſtationis temporibus ab utero delapſum ovum mucoſa ſubſtantia ſanguinolenta circumquaque obvolutum videtur : hujuſmodi placentam Ruyſchius ſanguinem praeter naturam concretum exiſtimaverat; at vero ſi aqua diſſolvatur, fibroſam permixtam texturam obſervamus ; quam Clariſs. Albinus nitide reſolvit ; quo magis placentae organica ſtructura adoleſcit , eo

 ſoli-

ſolidior videtur, mucoſa, villoſa fit ſubſtantia, elegantiſſimum muſcum refert, vaſcula fiunt ſenſim majora, ſolidiora, e quibus funiculus tandem umbilicalis educitur. Perpendite quemadmodum habitis proportionibus adaucta placentae ſoliditate, amplitudo decreſcat, pulpoſam tamen ſemper retinet mollitiem, vel ſolubilem ſaltem, atque ſpongioſam, reliqua membranarum pars, ſuper quam non adcrevit placenta, mollis celluloſa, mucoſa, glutinoſa inquam ſupereſt ex ea facie. Modo huic, modo illi ovi plagae (deſuper ipſum uteri orificium offendimus) in mulieribus adhaeret, dum tamen foetus in membranis eumdem ſemper ſitum tenet, ne dicamus ex ovi inclinatione fieri; funiculus umbilicalis non ſemper ab eadem placentae plaga prodit, quod iſta vegetationis inquam modum non ſemper eumdem tenet, aptatur autem aptae uteri plagae, etenim in beſtiis, quae diſcreta habent, & uteri cornubus propria acetabula, cotyledones omnino reſpondentes numero habent, ſitu, atque figura; exceſſum, aut defectum ullum numquam obſervaſſe contigit; longe tamen diverſa eſt cotyledonum, & acetabulorum ſtructura, quemadmodum & partium, quibus adnaſcuntur, ut cauſſa, quae alteros efficit, non eodem pacto altera componat, etſi ſucceſſive fiant; eſt tamen utrorumque ſtructura elegantiſſima, adeoque inquam diverſa, ut per contactum fieri, nequidem ſuſpicari poſſimus, itidemque longe variant inter ſe, ex variis animantium ſpeciebus, & in eiſdem animantibus harum partium numerus, & figura multum variat, etſi ſemper ſibi ad invicem reſpondeant; placenta inquam ipſa humana non per totam ſuperficiem ſuam aeque adoleſcit, per cumulos diſtinctos pleniores, ampliores, vividioreſque compaginatur, & in cotyledones aeque reſolvitur.

SUITE DES RECHERCHES

Sur le fluide Elastique de la Poudre à Canon:

PAR LE CHEVALIER SALUCE.

1. JE crois d' avoir asſés prouvé dans le Mémoire précédent que le fluide élaſtique qui ſe développe de la poudre à Canon eſt de même nature que l' air commun, & que la force prodigieuſe de ce fluide dépend de l'action du feu dans toutes ſes parties qui lui fait recouvrer ſa force élaſtique. Comme cependant cette matiére eſt une de plus intéreſſantes dans la Phyſique, je tacherai de perfectioner de plus en plus le travail que j'avais entrepris, en y ajoutant des nouvelles lumiéres qui ſerviront non ſeulement à confirmer la Théorie que j' ai établi, mais encore à lui donner une plus grande étendue.

Je vais donc expoſer les principaux réſultats de mes recherches. Les expériences ſur l' élaſticité, & ſur la compreſſion du fluide, que je n' avais qu' imparfaitement tenté comme je l' ai dit (*a*) & que j' ai tachê de répéter ſoigneuſement, ſerviront avec l' annaliſe de quelqu' autres faits à mettre hors de doute ce que j' ai déja avancé; je paſſerai enſuite à faire voir que la force du fluide dépend principalement de la viteſſe avec laquelle il ſe développe: les expériences qui ſuivent rempliſſent la prémiere de ces vues.

2. Je formai le tube de comunication entre le flacon ou je mettais la poudre, & le récipient, de cinq cilindres de verre aſſés longs; celui qui tenait au flacon l' était même d' avantage, afin que le fluide pû ſe dilater dans un

P 2 plus

(*a*) Voiés la notte * du mém. pag. 6.

plus grand espace sans trouver le moindre obstacle (*b*); je les garnis chacun d' un double filtre de gaze bien serrée, & j' en enduisis les quattre prémiers de bonne huile de tartre: je passai dans les tubes aussi du coton trempé dans la même huile, & je mis du sel de tartre pilé grossiérement sur le filtre de la piéce qui entrait dans le récipient; le baromètre recourbé finissait en forme d' entonnoir vers la partie qui comuniquait avec l' air extérieur, & l' autre extrémité entrait dans un petit cilindre qui tenait à un robinet, lequel passait dans le récipient en traversant la plattine de la machine pnéumatique. Toutes les jonctions furent soigneusement mastiquées, & j' opérai ensuite de la même maniére que dans l' expérience (3. du mém.): le mercure était presque à la hauteur de 27 pouces lorsque la poudre prit feu, en sorte qu' il ne serait resté dans ces cavités qu' $\frac{1}{2}$ pouce d' air environ, il baissa au prémier instant de dix à douze pouces, & après quelques oscillations qui diminuaient par dégrés le mercure commença à monter, & ne discontinua qu' après quelque tems; s' étant arrêté à un, ou à deux pouces plus bas qu' il n' était au moment que la poudre s' enflamma; je reconnus alors que le fluide avait aquis la température de l' air ambient, & je notai le point d' élévation à l' accoûtumée.

3. Je plaçai ensuite ce baromêtre d' épreuve à côté d'un autre exactement construit suivant la métode donnée (com. pag. 16.) afin de pouvoir comparer les changemens, & estimer la cause des altérations qui pouvaient survenir; je le gardai ainsi durant ving-trois jours sans qu' il m' ait été possible de découvrir que ce baromêtre eut souffert d'autres change-

(*b*) Il m' est toujours arrivé de voir briser mes vaisseaux lorsque le tube étant trop court, le filtre se trouvait prés du flacon, ou lorsque étant dans l' obligation de plier le tube, la courbure n' était pas assés eloignée du flacon. Mr. Halles dans son Appendice à la stat. des végét. nous apprend qu' il prit aussi cette précaution. pag. 341.

changemens que ceux qui dépandaient des variations de l'atmosphére: je crus enfin inutile de le garder plus long tems puisque je n'avais pas la moindre indication d'absorbtion, d'autant plus que Mr. Hauksbee nous apprend, comme je l'ai déja dit, que les $\frac{19}{20}$ dont il fait mention fûrent absorbés dans 18 jours sans avoir subit ensuite aucune variation. Le vingt-quatriéme jour pour déterminer les lois de la compressibilité de ce fluide j'ai versé à plusieurs reprises dans la jambe ouverte différentes quantités de vif argent, & ayant observé les diminutions de l'espace je trouvai que le degré de compression était précisément en raison des poids ajoutés (*c*).

4. La conclusion que j'ai tiré de mes expériences est sans contredit très-simple, & naturelle; & on doit acquiescer d'autant plus volontiers que tous les résultats concourent à la démontrer. Je suis pourtant d'avis que quoique l'air soit le grand agent qui produit les effets de la poudre, il exerce cependant dans cette rencontre au prémier instant une force plus expansive que s'il était parfaitement sec: car l'on sait qu'un air humide peut se dilater d'avantage, & qu'il se trouve en effet de l'humidité dans le salpêtre, ainsi que dans tous le sels cristallisés: il est pourtant clair, par ce que nous avons vû, que l'humidité n'a pas grande part dans les effets de la poudre, & ceci sera encore plus clairement prouvé dans la suite. Au reste quelque soit l'effet que peut produire l'humidité qui se développe d'une poudre donnée on ne saurait la déterminer précisément sans en connaitre exactement la quantité: on pourrait peut-être l'obtenir en brûlant cette poudre dans un flacon, qui fut ma-

(*c*) Je crois de devoir avertir ici que les colonnes de mercure que j'ai ajouté dans le tube susdit se trouvaient contenues dans l'espace cilindrique, de sorte que l'entonnoir que j'avais appliqué pour avoir une quantité suffisante de mercure, lorsque je faisais le vuide dans la jambe opposée, ne me servait en cette occasion que pour me faciliter les opérations.

maſtiqué à une file de balons ; on aurait alors cette quantité en entier par ſa condenſation. Je ne crois pas d' ailleurs qu' il y eut une méthode plus ſûre pour dénoüer cette queſtion ; car outre qu' il eſt fort difficile de ſavoir parfaitement combien chaque compoſant contient d'eau, quand même on en ſerait aſſûré, il ſerait encore queſtion de déterminer combien en retiennent les ſels neutres, que l' on trouve après l' inflammation ; ce n' eſt pas un point à negliger, puiſqu' on ſait que les ſels qui ſe criſtalliſent en contiennent une quantité conſidérable ; l' umidité donc qui ſe trouve dans les compoſans, ou dans la poudre même étant connue, on ne ſerait nullement illuminé ſur l'accraiſſement de la force expanſive qu' elle apporte à l' air.

5. Du reſte ſi l' eau que contient la poudre ſe développait en vapeurs dans le tems de l' inflammation, il eſt viſible que non ſeulement elle produirait toute ſeule les effets de la poudre, mais encore des bien plus grands, puiſque Mr. Muſchembroek a trouvé que l' eau qui ſe reſout en vapeurs a alors pour le moins une force onze fois plus grande qu' une égale quantité de (*d*) poudre ; une onziéme donc, c' eſt à dire une quantité bien petite de l' eau qui ſe trouve en effet dans la poudre, ſuffirait pour produire tous ſes effets, de façon que l' air n' y entrerait plus pour rien, ce qui eſt abſolument contraire à ce que j' ai fait voir & qui ſe trouve encore confirmé par l' autorité de pluſieurs Auteurs du prémier ordre.

6. Un Phyſicien renommé de notre tems prétend que l' air n' eſt pas ſuffiſant à produire tous les effets de la poudre je rapporterai ici ſes propres termes. *La (e) plûpart des Phyſiciens qui ont parlé de l' exploſion de la poudre ont attribué ce merveilleux effet uniquement à l' air qui s' y trouve comme incorporé par l' action des pilons, & à celui*

(*d*) Eſſai de phyſ. §. 873.
(*e*) Leçons de phyſ. expérim.

celui qui remplit les petits espaces, que les grains rassemblés comprennent entr' eux . . . . Ces raisonnemens doivent sans doute entrer dans l' explication des effets de la poudre enflammée, & je n' ai garde de les contester : mais je ne les crois pas suffisans, & je pense qu' il faut y en ajouter quelqu' autre &c. Je tenterai de développer les raisons qu' il apporte en les comparant aux autorités sur lesquelles il les appuye. Quant aux vapeurs qu' il associe à l' air auxquelles il attribue la vertu d' avoir contribué à faire baisser l' eau dans le tube de Mr. Bernoulli comme on peut le voir par ses propres expressions. *N' est-on pas tenté de croire, que dans le tuyau de Mr. Bernoulli il reste après l' inflammation quelque vapeur qui augmente un peu le volume de l' air avec lequel il se mêle, & qui fait baisser la surface de l' eau ?* quelles qu' elles soient, il suffit d' observer que ce grand Géométre n' ayant déterminé cet abbaissement que quatre heures après le refroidissement du fluide (*f*) on ne peut plus emprunter le secours d' aucune espéce de vapeur pour rendre raison du fait ; car il ne nous est pas encore donné de en connaître d' aucune sorte qui n' aquiére dans

(*f*) Mr. Bernoulli nous aprend qu' ayant mis le feu dans un tube au moyen d' un miroir ardent, à quattre grains de poudre, l' air qui s'en développa chassa l' eau hors du tuyau, après quoi elle remonta jusqu' à ce que le fluide eut acquis la température de l' air ambient, & s' arrêta ensuite trois ou quattre heures après; il mesura alors l'espace occupé par le fluide, & il le trouva capable de contenir 200 de ces grains, ce fait, & quelque réflexions qu' il y ajoute, lui font déterminer l' air contenu dans la poudre cent fois plus dense qu' il est dans son état naturel.

On peut remarquer en prémier lieu qu' il fait sentir, qu' à l' occasion de l'explosion l' eau fut poussée avec tant de violence que si le tube n' avait pas été bien long, non seulement l' eau, mais l' air même en aurait été entiérement chassé. *Adeo ut nonnunquam, nisi portio tubi sit satis longa, per orificium, non solum omnis aqua, sed aër expelli possit.* On peut noter eu second lieu que Mr. Bernoulli n' a donné que l' espace absolu de quattre heures après que l' eau s'était arrêtée, ou comme il dit, après le réfroidissement du fluide, & qu' il ne tient aucun compte de l' absorbtion des vapeurs sulfureuses pendant ce tems. *Proinde res ex voto successit; ideoque machinam immutatam in priorem locum temperatum transtulimus,*

dans un auſſi long eſpace de tems ſa condenſation naturelle, lorſque la cauſe qui avait produit ſa dilatation a entiérement ceſſé.

7. Quoique cet Illuſtre Auteur ait cherché par là de donner une explication du réſultat que Mr. Bernoulli rapporte dans ſa diſſertation *De efferveſcentia*, *& fermentatione*, inſérée dans le pr. Volume de ſes oeuvres à la pag. 35., on voit cependant qu' il a quelque doute ſur cette expérience comme ſes paroles ſemblent l' indiquer. *Je ſais bien* dit-il *que Mr. Bernoulli cité par Varignon ayant mis le feu &c.* (g) . . . . *& je conviens que cette induction s' il n'y a rien à rabattre donne beaucoup de force à l' opinion de ceux qui attribuent à l' air ſeul les grands effets de la poudre. Mais comment accorder cette expérience avec celles de Mr. Halles, d' ou il conclut avec toutes les apparences de vérité, que les matiéres ſulfureuſes que l' on brûle abſorbent l' air.* Il eſt pourtant ſûr que l' eſpace des deuxcent grains n' eſt pas exagéré, & qu' il eſt au contraire fort au deſſous de ce qu' il aurait été ſans l' abſorbtion des vapeurs ſulfureuſes, mais l' on voit aſſés que ce n' eſt qu' en conſéquence de la perſuaſion ou il était par ſa Théorie *a priori*, que *l' air ne ſuffit pas &c.* qu' il a avancé, que *dans le tuyau de Mr. Bernoulli* il reſtait *après l' inflammation quelque vapeur qui* augmentait *le volume de l' air &c.* & qu' il trouve de la difficulté à accorder cette expérience avec celles des Mr. Halles, il me parait cependant qu' elle ne porte pas coup à celles ci, à moins que l' on ne craie que Mr.

ſtulimus, ubi aquam in tubo ſenſim rurſum aſcendere obſervavimus, nimirum ob duplicem cauſam, tum ob translationem ex loco calidiori in frigidorem, tum ob ſubito incenſum ignem iterum extinctum, tamdiu, inquam, aſcendit aqua, donec tota machina refriguiſſet, & priſtinum ſtatum, induiſſet; tum demum amplius non aſcendit, ſed quievit, etiam per tres, vel quatuor horas, quamdiu in iſto ſtatu permittebamus; ſic itaque advertimus, non ad priorem terminum uſque aſcendiſſe, ſed notabiliter infra limitem poſuiſſe . . . . . . , ſed prout judicavimus ducenta granula pulveris pyri vix adimpleviſſent ſpatium.

(g) Voiés la note ci devant.

Mr. Halles n' ait voulu démontrer que les vapeurs sulfureuses ont la proprieté de fixer, ou d' absorber dans ce peu de tems presque tout l' air d' un tube quelconque, ce qui ne ferait pas l' intention de ce célebre Anglais (& c' est ce dont je n' oserais soupçonner le savant Auteur dont je parle). Car dans la Statique des végétaux il fait voir que l'air est absorbé par ces sortes de vapeurs (*h*): qu' il ne l' est que fort lentement, de sorte qu' elles ont cette vertu pendant plusieurs jours (*i*): que dans les prémiers tems elles ont plus d' action que dans la suite, comme le remarque Mr. Hauksbée (k): qu' elles ne peuvent enfin absorber tout l' air contenu dans l' espace ou elles sont renfermées (*l*); il parle ensuite de la grande quantité d' air qui sort du salpêtre, & en conséquence il ne doute point que le fluide éla-

stique

(*h*) Exp. 76. pag. 173.

(*i*) Ibid.

(k) Mr. Hauksbee ayant brûlé de la poudre dont le poid était d' un grain dans un tuiau, où il avait observé par l' abaissement de l' eau que la quantité du fluide generé occupait au prémier instant 222 fois le prémier volume, il remarqua que dans deux heures de là, l'eau était remontée de $\frac{4}{20}$ de l'espace abandonné, & que deux heures encore après elle était $\frac{5}{20}$ de plus au dessus. Hors il est évident que cette ascension de l' eau ne peut pas seulement dépendre du refroidissement du fluide, & de là condensation des vapeurs aqueuses comme parait le soupçonner l' Auteur de cette expérience: car comment pourrait-on penser qu' un peu de ce fluide si rare ait pû rétarder non seulement quelques heures, mais bien des journées avant que d' avoir acquis la température de l' atmosphere, puisque l' eau continua à monter pendant dix-huit jours, & qu' il n' y resta plus qu' $\frac{1}{20}$ après ce tems qui n' ai plus changé? Les expériences de Mr. Halles, & celles que j' ai fait moi même sont voir qu' une aussi longue absorbtion n' est düe qu' aux vapeurs acides & sulfureuses, & puisqu' on peut croire sans hazarder que dans une heure de tems, l' action de la chaleur, & des vapeurs aqueuses ait entierement cessé, il faut convenir que la diminution du fluide dans ce tems apportée par trois différentes causes, c' est à dire par la condensation des vapeurs, par celle de l' air, & enfin par l' absorbtion n' égalant que $\frac{2}{20}$, ou soit $\frac{1}{10}$ du fluide generé, le vapeurs aqueuses sur tout n' ayent pas cette grande vertu qu' on leur attribue.

(*l*) Pag. 202.

q

ſtique de la poudre ne ſoit de l'air commun (*m*): cet air cependant doit être conſidérablement condenſé, puiſque le même Mr. Halles par la diſtillation qu' il a fait du ſalpêtre a trouvé que l' air qui en eſt géneré occupait un volume cent quattre vingt-fois le prémier (*n*).

8. On peut auſſi examiner à cette occaſion le ſentiment d' un Phyſicien qui dans le quatriéme tome de l' Accadémie de Bologne a donné une diſſertation ſur ce ſujet; cet Auteur; dont le travail montre d' ailleurs aſſés d' érudition, entreprend de faire voir par un enchainement d'argumens, qu' il faut avoir recours aux vapeurs aqueuſes pour obtenir l' immenſe raréfaction du fluide, & il prétend que l'air n' eſt pas ſuffiſant, comme on peut le voir par le précis de ſon ſentiment que je vais expoſer. *Mr. Bernoulli* dit-il *nous aprend que l' eſpace abandonné par l' eau aurait pû contenir deux cent des grains qu' il avoit employés, donc en diviſant par 4 qui était le nombre des grains dont il ſe ſervit, l'on aura la denſité de l' air en raiſon de 50 par grain, or en ſuppoſant une chaleur égale à celle de l' huile bouillante, le volume du fluide rarefié, ſera 250 fois plus grand que celui de la poudre; mais Mr. Ammontons, Belidor, & moi même*, continue-t-il, *nous avons trouvé que la flamme de la poudre ſe dilate dans un eſpace 4 ou 5000 fois plus grand que l' eſpace de la poudre, donc, pour que l' air pût ſe dilater dans un auſſi grand eſpace, il faudrait que le degré de chaleur néceſſaire fût à celui de l' huile bouillante comme 16 : 1 ce qui n' étant pas probable, il faut donc avoir recours à l' eau qui eſt dans le ſalpêtre, & qui ſe convertit en vapeurs en même tems que la poudre s' enflamme.*

9. En prémier lieu je ne ſaurais penſer que la force, ou l' activité de la poudre dépende du volume de la flamme, ni qu' on puiſſe la méſurer par là, étant très-naturel que dans un fluide composé de parties inflammables, & de parties

(*m*) Pag. 237.
(*n*) Exp. 72. pag. 159.

parties actives, ces dernieres ne se dilatent pas dans un volume aussi grand que la flamme qui émane des autres: en effet il est évident que la force du fluide doit être déterminée par l'espace qu'il occupe dans son expansion, en vertu de laquelle il chasse les obstacles qui se présentent, & non pas par le volume qu'acquiert la flamme dans cet instant, puisqu'il est certain que la prémiere dépend entiérement des parties actives du fluide, sans que l'on puisse porter le même jugement par rapport à l'autre.

10. Notre Auteur n'a pas non plus observé que dans le tube de Mr. Bernoulli il faut avoir égard à l'air qui est absorbé par les vapeurs sulfureuses; or en supposant même que ce soit le refroidissement de l'air humide, qui ait seul contribué dans la prémiere heure à l'ascension de l'eau dans le tube, & que ces vapeurs sulfureuses n'y entrent pour rien, de façon que sans cela le fluide ne se serait dilaté que dans $\frac{18}{20}$; l'on ne pourra cependant pas se dispenser de leur attribuer les changemens arrivés dans les trois heures suivantes: or ces changemens, comme je l'ai ci devant observé (not. k) montent à 7 autres vingtiémes de l'espace résidu, de sorte que dans le tube il ne pouvait plus rester alors que $\frac{11}{20}$ de l'air géneré (ibid.), & comme cet air qui restait, était égal à cinquante fois le volume de la poudre, donc trois heures auparavant le volume du fluide géneré devait être pour le moins 81 fois plus grand que le volume de la poudre.

11. Ce résultat cependant ne saurait convenir avec celui que Mr. Hauksbee nous donne, quand même nous tiendrions encore compte de la prémiere heure, car nous n'aurions qu'un volume 90 fois plus grand, tandis que le susdit Auteur le trouve de 222, mais on voit assés que Mr. Bernoulli n'a pas prétendu donner une mesure exa-

ĉte du fluide, mais ſeulement une ingénieuſe maniére de le déterminer; car par ce que nous avons vu ci-devant (not. *f*) il a crû que l'aſcenſion de l'eau avait été cauſée par le tranſport de la machine d'un endroit à un autre qui était moins chaud, & par la prompte extinction du feu; c'eſt pourquoi il fait obſerver que l'eau ne ceſſa de monter que lorſque le fluide eut acquis la temperature de l'atmoſphere ſans pourtant nous faire ſavoir le tems que ce fluide employe à ſe refroidir, il nous dit ſeulement avoir obſervé la hauteur de l'eau trois ou quatre heures après qu'elle fut tranquille; mais c'eſt là une détermination bien vague, parceque l'on ſait que l'eau dans l'expérience de Mr. Hauksbee continua encore à monter pendant 18 jours compris le tems de ſon refroidiſſement: & cela eu égard a l'abſorbtion de l'air cauſée par les vapeurs ſulfureuſes, de ſorte que l'on ne peut pas ſavoir le tems qui s'écoula depuis l'inflammation juſqu'à celui où Mr. Bernoulli fit ſon obſervation, ni par conſéquent faire entrer en compte l'abſorbtion qui ſe fit dans ce tems-là.

12. Pour en revenir à l'Auteur ci devant cité (8): il détermine la denſité abſolue de l'air dans chaque grain de poudre par rapport à celle de l'air commun comme 50 : 1. parceque l'expanſion du fluide dans le tube de Mr. Bernoulli était au tems de l'obſervation dans la même raiſon à l'égard du volume de la poudre; outre les reflexions que j'ai fait, par leſquelles on peut facilement appercevoir l'inconſéquence de ce raiſonnement, il faudrait ſuppoſer encore que tout le volume de la poudre conſiſta dans un égal volume d'air pur condenſé, qui cependant comme nous l'apprend Mr. Halles n'y entre que pour la huitiéme partie, le reſte étant de parties inflammables, & groſſiéres (*o*): de

(*o*) Mr. Halles à la vérité ne dit cela qu'en parlant du ſalpêtre, exp. 72. pag. 159. mais comme l'air de la poudre n'eſt produit que par la décompoſition de cette ſubſtance, & que les deux autres n'en fourniſſent point, ou du moins

de plus l'on doit prendre en considération les intervalles qui sont entre les grains, & dont la somme en rend le volume absolu moindre d'un tiers.

13. Ensuite de toutes ces raisons, & de celles (11) qui me font préférer l'expérience de Mr. Hauksbee, ne s'agissant point d'ailleurs d'introduire ipotéthiquement l'action d'une chaleur sujete jusqu'a présent a plusieurs déterminations arbitraires, je remarque en prémier lieu que l'air generé à l'occasion de l'inflammation occupait un espace 222 fois plus grand que le volume de la poudre; or en retranchant la $\frac{1}{10}$ de l'espace qui avait été remplacé par l'eau dans la prémiere heure, pour être assurés que la chaleur de l'air n'y a plus aucune part, nous aurons le volume du fluide reduit à la température de l'air ambient environ 200 fois plus grand que celui de la poudre: en second lieu comme ce volume est moindre d'un tiers (12), celui du fluide sera par conséquent au moins 266 fois plus grand, & puisque l'air ne faisait que une huitiéme partie de la poudre (12) donc le volume du fluide était pour le moins 2128 fois plus grand que celui qu'il occupait dans la poudre avant l'inflammation, d'où il en vient enfin que l'air dans chaque grain, ou pour mieux dire dans la poudre employée, avait cette densité; ce qui est fort éloigné de ce que prétend l'Auteur dont j'ai rapporté le sentiment (8).

14. D'après tout ce que je viens de dire on peut voir clairement que les Théories purement speculatives, & établies

a priori

---

moins si peu qu'on ne s'en apperçoit pas assés sensiblement, j'ai crû de pouvoir me servir de cette lumiére par rapport à la poudre, & cela d'autant plus que le salpêtre ne faisant que les $\frac{7}{9}$ de la meilleure poudre on n'aurait à ce prix que la $\frac{1}{8}$ des $\frac{7}{9}$ &c.

a priori ſur de principes éloignés ſans le ſecours d'un enchainement d'expériences qui en appuyent le ſiſtême, ſont fort ſuiettes à caution, & c'eſt là un avvertiſſement que nous donnent les Phyſiciens du prémier ordre; & que j'ai táché de ſuivre autant qu'il m' à été poſſible: *en fait de Phyſique*, dit Mr. de Buffon, *on doit rechercher autant les expériences, que l' on doit craindre les ſiſtêmes, & la connoiſſance des effets*, dit-il, *nous conduira inſenſiblement à celle des cauſes, & l' on ne tombera plus dans les abſurdités, qui ſemblent les caractériſer*: il eſt vrai qu'il n'en faut pas non plus abuſer, & pour cela il avertit que l'on doit *en amaſſer juſqu' à ce que nous ſoyons inſtruits*.

15. Mr. Daniel Bernoulli apporte encore une difficulté qui eſt ſans doute plus réelle, & qui parait même inſurmontable au prémier aſpect. Voici en quoi elle conſiſte.

Ce ſavant Géomètre ayant calculé par les gravités ſpécifiques connues, de l'air, & de la poudre, la quantité d'air qui pouvait y être contenu, a trouvé que quand même on voudrait la ſuppoſer toute d'air, l'elaſticité de celui-ci ne ſerait jamais capable de produire la force que nous y obſervons. D'où il conclud qu'il faut, ou admettre dans la poudre un autre principe plus actif, que l'air, ou bien ſuppoſer que ſa force élaſtique augmente en ce cas dans une raiſon plus grande que celle des condenſations.

16. L'on pourrait à la vérité éluder entiérement cette difficulté en accordant à Mr. Bernoulli cette derniére hypotéſe; l'expérience nous apprend en effet que lorſque la denſité de l'air eſt ſeulement quadruple de la naturelle, la condenſation augmente en moindre raiſon que les poids comprimans; d'où l'on a tout lieu de croire, que cette raiſon ira toujours en diminuant de plus en plus dans les plus grandes condenſations. Mais quoique l'on ne doive pas exclure abſolument cette raiſon, on peut cependant y en ajouter un autre qui n'eſt pas moins digne de conſidéra-

tion

tion c' eſt-à dire, que puiſque l'air contenu dans la poudre eſt mêlé avec des ſubſtances hétérogênes, il pourrait bien avoir une gravité ſpécifique plus grande que celles-ci, & par conſéquent que la poudre même, & dans ce cas l'excès de condenſation pourrait en quelque façon compenſer la moindre quantité qu' il y en a, en effet nous avons trouvé *a poſteriori* que l'air de la poudre eſt aumoins 2128 fois plus denſe que l' air naturel, & au contraire ſelon le calcul de Mr. Bernoulli il ne pouvait avoir tout au plus, qu' une denſité mille fois plus grande.

17. De la réfléxion propoſée il parait que l' on peut déduire la véritable raiſon de cette différence; Mr. Bernoulli a déterminé la denſité de l' air de la poudre 1000 fois plus grande que la naturelle, enſuite de ce qu'il a poſé la gravité ſpécifique de la poudre égale à celle de l' eau; nous verrons dans la ſuite que l' air de la poudre n' eſt pas contenu indiſtinctément dans chacun de ſes compoſans, mais qu' il ſe trouve dans le ſalpêtre; or la gravité ſpécifique de ce ſel eſt plus-que double de celle de l' eau, & par conſéquent la détermination de celle de la poudre aſſignée par cet Illuſtre Mathématicien eſt moindre de plus de la moitié de ce qu' elle eſt en effet; il n' eſt pas extraordinaire par conſéquent que l' air ſoit beaucoup plus condenſé qu' il ne l' a ſuppoſé: La plus grande denſité enfin de l' air dans la poudre, & la plus grande raiſon ſelon laquelle cet air ſi fort condenſé augmente ſon élaſticité, peuvent fournir une ſolution de la difficulté propoſée par ce Savant.

18. Je ne ſaurais convenir non plus avec l' Auteur Italien ſur ce qu' il avance dans ce même mémoire que dans les opérations de la poudre, on condenſe de l' air ſans s' en apperçevoir, car ſelon cette opinion il s' enſuivrait que les ſubſtances étant ſeulement broyées enſemble ne devraient point produire autant de fluide que ſi on en grainait une égale

quantité, cependant ſoit que les matiéres ne ſoient que broyées, ou qu' étant grainées on les pile, & on les preſſe finement, la quantité du fluide ne change pas du moins aſsès ſenſiblement pour s' en apperçevoir: l' air enfin à mon avis ſe trouve dans les parties intimes. Quant à ce que ces deux Savans (6. 8.) nous diſent par rapport à l'inflammation de la poudre dans le vuide, je ne crois pas d' être obligé d' en parler plus au long ici, après ce qu' en ont dit de grands Hommes, & ce que j' ai expoſé moi même dans le mémoire précédent.

19. Il eſt inutile de pouſſer plus loin ces petites diſcuſſions, je paſſerai maintenant à éxaminer les proprietés, & les fonctions particulières de chacun des compoſans de la poudre; mais comme l' on ne ſaurait parvenir, le plus ſouvent à découvrir la raiſon, & le rapport des phénomênes, ſans combiner les effets produits par des principes qui aient entr' eux quelque analogie, j' ai crû devoir en comparer quelques uns ſelon les combinaiſons qui m' ont paru les plus propres à cet effet.

20. Le ſalpêtre eſt un ſel moyen, qui a entr' autres propriétés celle de ſe décompoſer par l' attouchement du phlogiſtique auquel l' acide qui s' en ſépare, s' unit intimément, ainſi qu' il eſt univerſellement reconnu en Chimie; & je ferai voir dans la ſuite que c' eſt en conſéquence de cette manœuvre que ſe produiſent les effets de la poudre. Mrs. Boyle, Halles, Muſchembroek, & pluſieurs autres Phyſiciens ont réconnu qu' il ſe développe un fluide élaſtique du ſalpêtre, lorſqu' il ſe décompoſe, ils ont même taché d' en déterminer la quantité, & preſque tous le tiennent pour de l' air naturel; Mr. Halles entr' autres n' en doute pas, (p) Mr. Boyle pour s' aſſûrer ſi l' air était néceſſaire pour la criſtalliſation de ce ſel éſſaya de combiner de l' eſprit de nitre avec du ſel de tartre dans une phiole vuide

(p) Stat. des végét.

vuide d'air (*q*), & n'ayant point vû ce mélange tomber en criſtaux après un certain tems, il conclut de la très-judicieuſement que l'air y était néceſſaire.

21. On obſerve à l'occaſion de l'effervеſcence qui ſe fait par le mêlange de ces deux ſubſtances, en le pratiquant dans une vaſe fermé que le baromêtre deſcend après quoi il remonte, & ſe rend toujours à niveau, d'où l'on peut conclure que dans les prémiers tems il ſe développe beaucoup d'air, & qu'il ſe réabſorbe enſuite; de façon que l'on pourrait démander ſi ce n'eſt point les parties des matiéres qui étant dans un violent mouvement pour s'unir réciproquement, excitent une chaleur qui communique à l'air la vertu de ſe dégager de dedans ces mêmes matiéres, & ſi ce n'eſt point dans le tems que commence l'évaporation qu'il s'introduit de nouveau? il eſt vrai qu'on pourrait douter que la chaleur qui eſt produit par le mélange des matiéres cauſe la deſcente du mercure, par la dilatation qu'elle procure à l'air, laquelle ceſſant l'oblige de remonter.

22. Ce ſont deux points trop délicats pour chercher de les décider ſans le ſecours d'une longue ſuite d'expériences guidées par les raiſonnemens les plus éclairés, je me contenterai en attendant de ſuivre l'opinion commune des Phyſiciens, & d'en apporter quelque raiſon plauſible me réſervant de traiter ces matiéres plus amplement une autre fois, d'autant plus que je me flatte d'avoir le plaiſir de lire ce que l'Auteur dont j'ai expoſé le ſentiment (8) promet de donner, & de profiter de ſes découvertes pour mieux reüſſir dans mon entrepriſe.

23. La deſcente du mercure dans l'eau eſt très-rapide, la derniére même à cauſe de ſa moindre gravité ſpécifique en eſt chaſſé du Siphon par repriſes, après les prémiers moments il ſe fait des oſcillations, & enfin le liquide ſe

(*q*) Op. omn. Tom. 2.

rend à niveau dans les deux jambes, mais comme il ſe paſſe un tems conſidérable avant que le liquide ſe ſoit rendu à niveau, il parait que nous devons plutôt penſer que c'eſt de l'air développé, car il n'eſt pas probable qu'il fallut autant de tems à l'air du récipient pour ſe remettre dans ſon prémier état, & qu'il peut ſe faire que l'abſorbtion de l'air generé ſoit plus difficile, & dure plus long tems, comme nous en avons des exemples dans celle qui ſe fait par les vapeurs ſulfureuſes, & même par la poudre brulée, laquelle ſelon ce que nous avons vû dûre pendant pluſieurs jours; (*r*) enfin dans les expériences qui j'ai fait avec les vaſes ſoigneuſemeut maſtiqués je n'ai jamais trouvé qu'une partie du mélange reduite en ſel (*ſ*), & encore après long tems, ayant enſuite expoſé à l'air le reſte, qui était encore liquide il s'eſt auſſi transformé en ſel, & j'ai toujours trouvé au fond du vaſe dans lequel j'avais placé celui ou dévaient ſe méler les ſubſtances, une quantité d'humidité qui ne peut-être à mon avis que les vapeurs condenſées.

24. Cet air qui ſort ainſi, lorſque ces deux liquides ſont mélés enſemble ne doit différer de celui de la poudre à Canon, qu'en ce qu'il ne ſe trouve point mélé avec de vapeurs ſulfureuſes, & par cette même raiſon ſi l'extinction du feu ne dépend que de la mauvaiſe nature de ces ſortes d'exhalaiſons, la flamme ne devrait rien ſouffrir, c'eſt cependant ce qui n'arrive pas, car un flambeau allumé étant introduit dans un vaſe, ou ces deux liquides ayent été combinés, s'éteint dans le moment, c'eſt un phénomene des plus ſinguliers, je m'en ſuis cependant aſſûré par pluſieurs expériences réiterées.

25. Ce phénomène ne paroit qu'une conſéquence de la Théorie que nous avons donné ſur l'extinction du feu, & de la flamme dans des lieux clos (com. pag. 22.); car l'air

(*r*) Voi. la not. k.

(*ſ*) Je crois que l'on me diſpenſera de donner le mannuel des expériences, il ſont trop aiſés a être imaginés.

l' air qui eſt chaſſé des ſubſtances, & celui qui eſt dans le vaſe ſouffrent des altérations cauſées par la chaleur excitée enſuite de la mixtion de ces liquides, comme s' il paſſait autour d' un corps échauffé à un égal degré de chaleur, ou plus encore que ſi on le lui communiquait par un feu extérieur d' égale intenſité.

28. Il n' eſt par conſéquent pas extraordinaire que Mr. Muſchembroek n' aie pu entrétenir la flamme dans les airs *factices*, puiſque s' étant ſervi à peu près de la méthode de Mr. Halles pour ſe les procurer, leurs procédés dépendent tous de ce principe. Ceci eſt encore confirmé par l' expérience que j' ai fait dans cette vûe ; je combinai dans un récipient fermé (de la même maniére que j' ai fait pour le nitre regéneré) du vinaigre diſtillé avec de l' eſprit de ſel ammoniac, (*t*) quelque tems après l'effervefcence, j'introduiſis le flambeau allumé, & il ne me fut pas poſſible de connaître qu' il eut ſouffert la moindre altération.

27. Il n' eſt pas douteux que l' air dévéloppé de quelque corps que ce ſoit, par l' action du feu, ou par une chaleur inteſtine, ne ſert aucunement à la conſervation de la flamme, & du feu, & que les moiens dont on ſe ſert per rendre ces fluides propres à la reſpiration des animaux, & à conſerver leur élaſticité, ne ſont d' aucune utilité pour entretenir le feu (*u*) cependant en conſéquence de la Théorie établie, que la chaleur endommage tellement l' air qu' il ne peut acquerir ſes proprietés ſans ſe rénouveller, à moins qu' on ne lui faſſe ſubir par le moyen de la glace un froid violent, & même pendant pluſieurs heures, j' ai tenté cet expédient ſur les fluides, & m' étant procuré une quantité de fluide élaſtique de la poudre dans un vaſe convenable

(*t*) Le mélange de l' eſprit de nitre avec celui d' Ammoniac fait un effervefcence que l' on dit froide, en effet elle ne manifeſte aucune chaleur ſenſible.

(*u*) Comme on peut le voir au long dans les *comm. pag.* 22.

venable pour l'éprouver, je començai par introduire un flambeau allumé dans ce fluide non purgé, mais à peine en eut-il aproché qu'il fût éteint, je fermai auſſitôt le trou par le moyen d'une platine bien aiuſtée, & j'entourai le vaſe de glace ſur laquelle je mis du ſel ammoniac, j'eus ſoin enſuite de faire ajouter à propos de la glace, & du ſel, & après environ 12 heures, j'ouvris la platine ſans exciter le moindre mouvement, & j'introduiſis enſuite le flambeau allumé qui ſe conſerva auſſi bien que s'il eut été dans l'air commun. Des pareilles expériences faites ſur l'air corrompu par l'effervescence du ſel de tartre avec l'eſprit de nitre donnérent les mêmes réſultats (v).

28. De tout ce que je viens de dire, il eſt clair que les moyens propres pour rendre à l'air la propriété d'être conſtamment élaſtique, & de ſervir à la reſpiration des animaux, ne peuvent pas réuſſir à lui rendre auſſi celle d'entrétenir le feu, parceque les fumées, les exhalaiſons, & les vapeurs endommagent les deux prémieres, & la chaleur détruit celle-ci; mais comme ces cauſes ſont réunies dans l'inflammation de la poudre, ainſi tout ces caractéres de l'air doivent néceſſairement ſouffrir (x) toutes ces altérations.

29. Après avoir établi ce principe univerſel dans lé plein j'ai voulu éxaminer les effets, qui ſurviendraient en tirant une

(v) Dans le mémoire précédent j'ai mis ſous un point de vue le plus clair qu'il m'a été poſſible les raiſons pourquoi le fluide élaſtique de la poudre, quoiqu'il ſoit de l'air pur, ne peut cependant pas être propre à entretenir le feu; elles ſuffiſaient toutes ſeules à détruire la ſeconde objection du Célébre Mr. Muſſchémbroek, & à donner plus de poids à mon ſentiment que j'avais appuyé d'un nombre de faits, mais comme il nous eſt réüſſi de jetter les fondemens d'une Théorie ſur cet importante partie de la Phyſique, & que ne nous étant pas contenté d'avoir démélé la véritable cauſe de la dépravation de l'air par raport à la nourriture de la flamme dans des lieux clos, nous avons trouvés des moyens propres à lui rendre cette vertu, j'ai crû néceſſaire de tenter des expériences, par leſquelles je puſſe confirmer de plus en plus ce que j'avais dit, d'autant plus que le mobile de nos recherches ſur ce point intéréſſant, avait été celui de décider la difficulté de l'Auteur mentioné.

(x) Cet article a été traité plus au long dans le *comm. pag.* 33.

une partie de l'air du récipient, à cet effet je diſpoſai ſelon la méthode dont ſe ſervent les Phyſiciens une pétite phiole qui contenait de l'eſprit de nitre, enſorte qu'on pouvait par le moyen d'une verge, qui paſſait à travers le ſommet du récipient, faire verſer le liquide dans un vaſe où j'avais mis de l'huile de tartre, ſans introduire de l'air: je pompai à peu près la moitié de l'air, & après cela je procurai de ſaturer le mélange; la mixtion ſe fit avec une efferveſcence extraordinaire, de ſorte qu'une partie du mélange ſe répandit ſur la platine avec un grand bouillonement, les oſcillations ſuivirent à l'ordinaire, & après que le mouvement eut ceſſé, le mercure qui était reſté ſuſpendu dans la jambe expoſée à l'air commença à remonter dans l'oppoſée, & s'arrèta enſuite à peu près à la même hauteur qu'il était avant la mixtion, je laiſſai l'appareil pendant long tems, & n'étant ſurvenu aucun changement au mercure, j'obſervai que le ſel n'était formé que çà & là en très petite quantitè, j'expoſai à l'air cette mixtion, & le ſel ſe forma.

Je répétai deux fois cette expérience pour y introduire le flambeau qui s'y conſerva allumé, mais on en voit aſſés la raiſon; c'eſt qu'en ouvrant le trou de la platine il s'introduiſit beaucoup d'air commun & frais, qui ſervit à remplacer celui qui manquait.

31. L'on voit par tout ce que je viens de rapporter qu'il eſt très naturel qu'il ſe développe de l'air en mêlant les deux liquides, & qu'il ſoit enſuite entiérement réabſorbé; que le ſalpêtre, qui ne différe du nitre régéneré que parcequ'il eſt naturel, contient une grande quantité d'air; en conſéquence de ces notions d'ailleurs confirmées par un infinité d'autres expériences, que les Phyſiciens ont fait, je cherchai de m'aſſurer ſi le ſalpêtre a par lui même la proprieté expanſive, & je fis l'expérience, de la maniè-re, que je vais décrire.

Je ſcellai hermétiquement dans une phiole de verre, du ſalpêtre, la quantité du ſel occupait environ $\frac{1}{3}$ de la capacité : je la mis enſuite ſur le feu que j' augmentai graduellement, enſorte que l' air ſe développait peu à peu ſans ſouffrir une grande raréfaction au commencement de l' opération, & ſe trouvait enſuite très raréfié, lorſque ce qui reſtait était contraint de ſe déployer ; aprés cinq à ſix minutes la phiole ſe briſa avec quelque détonnement ; m'étant déterminé à la répéter, je jugeai à propos de ſceller en même tems un autre phiole avec un bouchon de liége pouſsé à force, & bien battu, & après l'avoir miſe ſur les charbons en même tems qu' un autre fermée à la lampe, elle força le bouchon à un hauteur aſsès conſidérable, & il tomba à trois pieds loin du rechaud quelque tems avant que l' autre éclata.

33. Il eſt bon de remarquer que lorſque le bouchon fut loin, il ne ſortit rien du ſalpêtre qui était reſté liquide au bas de la phiole ſans un grand bouillonement d' où il s' enſuit que le ſalpêtre a la propriété de forcer les obſtacles qui le retiennent, lorſque par le moyen du feu il peut dégager l' air qu' il contient, quoiqu' il ne s' enflamme pas pour autant.

34. Le ſucre a auſſi cette vertu, mais elle eſt moins ſenſible ; je l'aſſujettis aux mêmes expériences, & quoique il ne la manifeſte pas dans un tems auſſi court, ni avec autant de violence il ne laiſſe pas de briſer la phiole, & de chaſſer le bouchon. Il ne ſerait peut-être pas hors de propos d' examiner tous les ſels eſſentiels ; mais je réſerve cet examen à un autre tems.

35. Le ſouffre contient un acide vitriolique, & une matiére phlogiſtique, il a un nombre de propriétés qui nous ſont connues. Le Célébre Mr. Stahl s' eſt diſtingué dans l' analiſe qu' il en a fait. Mrs. Halles, Muſchembroek, &

après

après eux bien d'autres Phyſiciens ſont d'avis que les vapeurs du ſouffre brûlé abſorbent l'air.

36. Ces deux grands Hommes on décidé ce fait d'après les expériences dont ils ſe ſont ſervis, mais comme elles ne ſont pas tout à fait déciſives, parceque le ſouffre étant allumé hors du récipient donne lieu à la raréfaction de l'air qui l'environne, & que lorſqu'il ſe refroidit, l'eau doit néceſſairement monter conſidérablement (y), j'ai jugé a propos de lui mettre le feu avec un miroir ardent, & dés qu'il eut diſcontinué de brûler, je le laiſſai durant deux jours entiers, & j'ai obſervé que le mercure monta ſenſiblement au deſſus du niveau environ $\frac{2}{7^e}$ de ligne: cette aſcenſion cependant ſe fit dans moins de quatre heures de tems; j'ai remarqué auſſi que durant l'inflammation du ſouffre le mercure baiſſait dans le ſiphon, ce qui m'avait fait croire qu'il ſe développait de l'air, mais ayant eu ſoin de mettre le flacon à l'abris des rayons du ſoleil, ne laiſſant à découvert que ce qui était dardé par le foyer du miroir, j'ai vû une grande différence dans l'abbaiſſement, que je crois d'autant plus cauſé par la raréfaction, qu'en le plongeant dans de l'eau qui avait aquis la température de l'air ambient, le liquide rémonta aſſés viſiblement juſqu'au niveau ſans diſcontinuer.

37. Le charbon eſt la troiſiéme ſubſtance qui entre dans la compoſition ordinaire de la poudre à Canon; il eſt très-porreux, & on prétend que c'eſt ce qui lui donne la couleur brune que l'on lui voit, & un Célébre Phyſicien (a) a obſervé que c'eſt en conſéquence de cela qu'il prend feu aiſément: il eſt compoſé de parties terreſtres, & de parties craſſes, ou phlogiſtiques. Cette matiére ne nous fournit pas

(y) Stat. des végét.
(z) Boher. chaem.

pas des réflexions plus particuliéres. Je m' en vais donner maintenant comme je l' avais promis un détail des résultats que j' ai eu de plusieurs mélanges que j' ai jugé à propos d' essayer.

38. On obtient une espéce de fusée en mettant deux parties égales de souffre, & de salpêtre dans un creuset qu'on expose ensuite au feu, ou dans un creuset enflammé.

39. En substituant du charbon au souffre il se fait une explosion, & une déflagration subite, si l'on jette les deux matières dans un creuset enflammé, ou que l' on fait dévenir rouge; cette déflagration est plus forte que la précédente.

40. Le souffre intimément broyé avec le charbon se consume plutôt que lorsqu' il est seul, si le charbon n' est pas réduit en poudre il s'envéloppe de la flamme du souffre sans pourtant s' embraser, & si ce charbon est en feu il s' éteint à mésure que le souffre se fond, & s' enflamme: si enfin on jette un charbon dans le souffre fondu la flamme de toute la surface l' entoure aussitôt presque en forme conique.

41. On parvient à un mélange des plus conditionnés pour la poudre en mettant 7 parties de Salpêtre, une de souffre, & une de charbon, cette combinaison nous ébauche tous les phénomènes de la poudre quoiqu' elle ne soit pas encore manufacturée.

42. Je crois ne devoir pas non plus passer sous silence, que la poudre s' enflamme dans quelqu' air infecté que ce soit, c' est ce que j' ai tâché de bien assûrer, & il m' est réussi d' enflammer de la poudre dans un endroit rempli de la fumée d' une chandéle, une autre fois dans un flacon rempli de vapeurs de poudre, & enfin dans un autre plein de vapeurs sulfureuses, il est vrai que dans les deux derniéres elle tarda plus long tems à s' enflammer apparemment parceque ces vapeurs avaient fixé une partie de l' air.

43. Un

43. Un mélange de ſouffre & de ſalpêtre étant moins facile à s' enflammer qu' un mélange de charbon, & de ſalpêtre, il me parait qu' on doit conclure de là que le phlogiſtique du charbon quitte plus facilement, & plus promptement les parties terreſtres auxquelles il eſt uni pour s' attâcher à l' acide nitreux & le faire détonner, que celui du ſouffre; parceque celui-ci ſe trouve déja rétenu par l' acide vitriolique avec lequel il a une grande affinité.

44. En conſidérant donc la plus grande facilité que le dernièr mélange en queſtion a de ſe décompoſer plus ſimultanéement, ce qui ne peut de moins de lui procurer plus de force, & faiſant enſuite attention aux déſavantages que le ſouffre apporte aux armes à feu, je ſuis porté à croire que la poudre que l' on férait ſans ſouffre, ne pourrait être que d' un très grand uſage dans pluſieurs occaſions (*a*).

45. Les effets de la poudre ſe manifeſtent donc en conſéquence de l' inflammation du ſouffre qui met enſuite en feu le charbon pilé lequel donnant de l' effort au feu, communique un plus grand dégrè de chaleur au Salpêtre qui eſt décompoſé par l' action du phlogiſtique auquel ſon acide s' uniſſant ſe diſſipe avec bruit, & ainſi en vertu de l'action, & de la réaction de l' air généré, & de l'ambient, le feu ſe communique aux grains, ce qui ſert à prouver auſſi, comme le démontre Mr. le Chev. D' Arci, (*b*) que l' inflammation de la poudre eſt ſucceſſive (*c*) ainſi que j' ai déja fait

ſ obſerver

(*a*) Cette conjecture que je n' ai déduit, que des faits, ſe trouve confirmée par des expériences faites dans cette vüe par un habile homme; il en donne un long détail dans l' Encyclopédie à l' article *feu artificiel*. Les eſſais qu' il a fait pour décider ce point paraiſſent aſſés déciſifs, de ſorte que je me diſpenſe volontiers de mettre au long ici les autres réflexions qui m' ont porté à jetter cette propoſition, on ſera ſatisfait de celles que l' on trouve à l' endroit cité.

(*b*) Mém. de l' Accad. des Scienc. de Paris ann. 1750.

(*c*) Preſque dans tous les calculs qu' on a établi pour déterminer la viteſſe d' un boulet chaſſé par la poudre hors du Canon, ou pour déterminer la force abſolue de la poudre, on a poſé que l' inflammation fut inſtantanée, parceque l'on n' avait pas tenté bien ſoigneuſement de s' en aſſûrer par l'expérience: d'où l' on peut inférer que ces calculs ne ſont pas irrépréhenſibles.

observer (*d*) : il eſt bon de rémarquer ici en paſſant que cette union ne peut ſe faire que par la force ou vertu d'affinité, or il eſt probable que l' air ſe dégage auſſi vite que l' acide ſe diſſipe, & que c' eſt cette même force qui contraint les deux ſubſtances à s' unir réciproquement, qui en détermine le dégré.

46. Quoique le ſucre ait la propriété de ſe dilater comme nous avons vû (34), & de forcer en conſéquence les obſtacles qui s' oppoſent à ſon expanſion, il ne m' a cependant jamais donné aucune marque aſſûrée qu' il pû faire quelque exploſion, quoique je l' euſſe melé avec du ſouffre, & du charbon ſelon pluſieurs proportions : il ne faiſait que fuſer très-lentement, lorſqu' il prenait feu.

47. Les matiéres graſſes, & huileuſes, comme le ſuif, la cire, les réſines combinées avec le ſalpêtre produiſent le même effet que ſi l' on avait melé du charbon avec du ſalpêtre, & elles n' agiſſent que lorſque le feu les a réduites en une eſpéce de charbon : le camphre quoiqu' il ſoit auſſi de la nature des matiéres précédentes, cependant comme il eſt ſi facile à s' enflammer, & qu' il ne peut pas changer comme les autres, il ne procure pas une déflagration auſſi violente au ſalpêtre, car le mélange s' enflamme à une chaleur très-modique.

48. On voit clairement par ce que je viens de rapporter qu' il faut que les matiéres ſoient propres à être réduites en charbon pour déflagrer avec le ſalpêtre, c' eſt à dire qu' elles puiſſent ſe dépouiller de l' eau, & des autres élémens par l' action du feu, & que le phlogiſtique ne ſe trouve plus uni qu' à des parties terreſtres ; d' où il parait que les autres élémens ont la propriété de retenir le phlogiſtique, ou celle d' empêcher qu' il agiſſe, en effet nous avons vû que le ſouffre dont le phlogiſtique eſt fortement retenu par l' acide vitriolique (43) fait une défla-

gration

(*d*) Voi. le mém. pag. 9. (14).

gration plus lente avec le salpêtre, que ne fait le charbon (39).

49. Le sucre qui quoique mêle avec des matiéres grasses, ne fait aucune explosion non plus que plusieurs autres substances qui contiennent d'ailleurs une grande quantité d'air, ne serait-il peut-être pas, comme elles, incapable de déflagration, parcequ' il ne se trouve pas dans le melange une action d'affinité suffisante à les décomposer subitement, & par conséquent à donner un effort libre, & prompt à l'air qui est engagé, malgré l'action de la chaleur, & du feu? & quelques unes comme le camphre ne serait ce point, parcequ' étant trop faciles à s' enflammer, elles ne laissent pas le tems aux autres matiéres d'acquerir un dégrè de chaleur suffisant pour se décomposer? car si l'on substitue le camphre au souffre dans la composition de la poudre, ce mélange a beaucoup moins de force que celui du souffre, & du salpêtre.

50. La poudre fulminante ayant beaucoup de rapport à la matiére que j'ai traité jusqu'à présent: je crois en devoir maintenant faire l'objet de mes recherches.

51. L'explosion de la poudre fulminante comme l'on sait, est accompagnée d'un détonnement très violent, & infiniment supérieur à celui de la poudre à Canon; on à de plus remarqué qu'à l'occasion de sa décomposition elle perce la cuillére de metal dans laquelle on l'expose au feu, de sorte que plusieurs Physiciens ont pensé que cette poudre avait une particuliére direction vers le bas: des autres, pour donner une explication du bruit horrible dont son explosion est suivie, ont crû que cet' étrange phénomène dépendait d'un plus grand développement de fluide: Mr. Halles cependant remarque très sensément que cet accraissement n'est pas causé par une plus grande quantité d'air qui se déploye, & il l'attribue à la fixitè du sel de tartre, dont l'air ne peut se développer que par un très grand dégré de chaleur.

52. Sans m' arrêter à donner la deſcription de toutes les expériences que j' ai fait, je rapporterai ſeulement ce qui m' en eſt conſtamment réſulté.

I.

En mettant le feu à la poudre fulminante de la maniére que l' on le met à la poudre à Canon, elle ne fait que décrépiter ſaus aucun détonnement, & ce n' eſt qu' avec peine qu' elle s' enflamme.

I I.

Pour pouvoir ſe décompoſer, elle doit prémiérement entrer en fuſion, ſoit qu' elle ſoit en plein air, ou dans le vuide.

I I I.

Le fluide élaſtique qui en eſt produit a à peu prés les mémes caractéres que celui de la poudre à canon, il eſt pernicieux à la reſpiration, il ne conſerve pas toute ſon élaſticité, & n' entretient pas le feu; on ne doit pas s'en étonner, car j' ai fait voir ci-devant, & dans le mem: pag: 11. & ſuiv: que les exhalaiſons ſulfureuſes en ſont la cauſe.

I V.

Ce mélange enfin qui détonne avec tant de violence dans l' air; qui ſe fait jour à travers une cuillére, ne fait aucun bruit dans le vuide, & ne briſe pas ſeulement un flacon de verre le plus mince. J' ai fait cette expérience d'autant plus ſoigneuſement qu' elle devait me fournir des grandes lumiéres; l' appareil fut des plus ſimple, un flacon ou j' avais mis de cette poudre était maſtiqué à un long tuyau de verre, qui entrait dans un petit récipient muni d' une tube de baromêtre; aprés le vuide fait, indiqué par la hauteur de 27 pouces environ du mercure dans le tube, on plaça un rechaud plein de charbons en feu, aprés quelque tems la poudre ſe décompoſa, & j' en fus avverti par la lumiére qui en émana; je ne quittai point le baromêtre de vuë, & la dépreſſion du mercure fut très grande

au prémier inſtant, & diminua enſuite conſidérablement. Enfin au tems qu' il devait avoir aquis la température de l' air ambient, je trouvai le volume du fluide moindre, que ſi ç' avait été de poudre à Canon, d' ou l' on peut conclure avec aſſûrance que ces grands effets ne dépendent pas d' un plus grand dévéloppement d' air.

53. Le phénomène dont j' ai fait mention ci devant de percer une cuillére, eſt donc celui ſur le quel on s' eſt fondé pour attribuer à cette poudre la proprieté d' éxercer ſa vertu élaſtique vers le bas: elle eſt cependant ſi ſurprenante qu' on ne ſaurait jamais imaginer en vertu de quoi les loix ordinaires de la nature ſeraient ici violées; c' eſt précifement ce qui m' a determiné à conſtater ce fait par les expériences avant que de m' y repoſer.

54. J' ai commencé par dire (52. IV.) que dans l' expérience que je fis dans un flacon vuide d' air, il n' y eut aucun détonnement, & que le verre n' en a rien ſouffert: j' ai mis une autre fois de cette poudre entre deux lames minces, & concaves enſorte qu' elles en étaient remplies, je les liai enſemble, & les mis au milieu des charbons ardents, aprés quelque tems il ſe fit une détonnement horrible, & je ne trouvai plus que quelque petit reſte des lames: mais pour m' aſſûrer encore d' avantage de ce fait je fis menager deux petites cuilleres, enſorte qu' en rempliſſant l' eſpace concave de poudre fulminante l' air extérieur ne pouvait s' y introduire, je les mis enſuite dans le feu ayant pris mes précautions pour obſerver ſans riſque; dans quelque tems de là, la cuillére ſupériere fut chaſſée en haut avec une impétuoſité étonnante, & celle d' en bas ne ſouffrit rien.

55. L' on voit évidemment par ces expériences prémiérement que la force élaſtique de cette poudre eſt uniforme en tout ſens, & on peut déduire en raprochant ce que

j'ai dit au commencement de ce paragraphe, que puiſque les phénomènes qui ſe manifeſtent dans l'air n'ont plus lieu dans le vuide, il faut que la viteſſe avec laquelle l'air ſe développe ſoit ſi ſubite, & ſi grande que l'air extérieur ne puiſſe avoir le tems de céder, & que par conſequent le fluide rencontre de la part de l'air une réſiſtence ſupérieure à celle de la cuillére, qui a déja ſouffert par l'action du feu, & par celle du foye de ſouffre qui ſe forme dans ce tems. L'on remarque même que ſi la cuillére eſt de fer, elle n'eſt point auſſi aiſément percée.

56. Si l'on conſidére que la réſiſtence d'un milieu eſt en raiſon compoſée de la denſité du même milieu, & de la viteſſe du fluide qui heurte, & que la poudre à Canon ne rencontre pas aſſés de réſiſtence de la part de l'air pour pouvoir réagir avec autant de force que la poudre fulminante ſur les corps ou'il eſt placé, il faudra accorder à la viteſſe immenſe du dévéloppement du fluide, l'action étonnante de cette poudre, qui par conſéquent doit être infiniment ſupérieure à celle de l'autre.

Si donc la viteſſe ſeule avec laquelle un fluide ſe développe, contribue ſi fort à ſon action, de maniére que les effets de la poudre fulminante ne ſoient pas comparables pour l'intenſité avec ceux de la poudre à Canon, il ſera moins extraordinaire que par la lenteur du développement, ces matiéres dont nous avons parlé (46. 47.) qui contiennent une égale, & peut-être une plus grande quantité d'air que la poudre à Canon, ne puiſſent pas produire des effets aprochans des ſiens.

57. L'inflammation d'un mélange de charbon, & de ſalpêtre déflagre plus promptement comme nous avons vu (33. 24.) que celui du ſouffre, & du ſalpêtre, donc cette poudre aura beaucoup plus de force que celle ou il entre du ſouffre, & par conſéquent outre l'épargne que l'on fera

l'on

l'on obviera encore aux endomagemens causés par le souffre, sur tout à l'évasement des lumiéres (*e*).

58. Il est connu que la poudre à Canon s'enflamme beaucoup plus vite, dans des espaces renfermés comme dans les piéces d'Artillerie, (*) & dans les mines, qu'en plein air: Outre cela les obstacles qu'elle rencontre ne la laissent éclater que lorsque la plus grande partie de son fluide est développé; c'est ce qui fait que son action est presque instantanée & ce qui rend ses effets semblables à ceux de la poudre fulminante.

59. Si nous faisons attention à présent aux substances qui entrent dans la composition de la poudre fulminante nous pourrons peut être découvrir d'ou dépendent ses effets étonnans. Le souffre avec le salpétre fait une poudre qui mise dans le creuset fuse lentement, & donne une explosion très faible, qu'on ajoute ensuite à ce mélange du sel de tartre, ce sera à la décomposition qui s'en fera que l'on aura tous ces phénomènes surprenans; donc la violence de l'explosion, & du détonnement seront un effet du sel, causé ou par l'humidité ou par l'alkalinité; ce n'est pas par l'humidité, & cela par plusieurs raisons la prémiere se tire de la maniére avec laquelle elle s'enflamme, on observe en effet à cette occasion qu'elle est non seulement toute désséchée mais qu'elle doit être en fusion (51. II.): la qualité de l'Alkali pour que cette poudre soit parfaite nous fournit une seconde raison, il doit être parfaitement calciné, car s'il est humide il ne fait plus autant d'effet; une poudre de cette espéce que j'ai fait me fournit la confirmation de ceci, elle etait faite de deux parties de salpétre, une de souffre, & deux de tartre reduit en charbon

(*e*) Je me crois dispensé de faire ici des applications de cette Théorie à l'usage de l'artillerie, ces recherches demanderaient un tems plus long, & un examen plus réflechi, d'ailleurs Mr. le Chev. D'Antonj, Directeur des écoles Théoriques de l'Artillerie prépare sur cette matiére un ouvrage qui sera une nouvelle preuve de l'étendue de ses lumiéres dans toutes les sciences qui peuvent servir à la perfection de celle ci. (*) Mém. de l'Acad. de Scienç. an. 1750.

bon cette poudre contenait assurément beaucoup plus d' eau que la fulminante ordinaire, & cependant ne détonnait pas avec autant de violence quoique elle surpassa de beaucoup l'explosion de la poudre à Canon.

61. Une autre espéce de poudre fulminante que j' ai fait qui n' attire pas l' humidité, & qui n' a encore été indiquée par personne que je sache, me présente un troisiéme argument contre l' action de l' humidité, & concourt à faire voir que ces effets dépendent de l' alkalinité. J'employai du sel de soude qui ne contient point d' eau, & dont les cristaux n' attirent non seulement pas l' humidité de l' air, mais se réduisent encore comme en farine, les doses étaient les mêmes, parceque je ne cherchais pas de déterminer celles qui me donneraient la meilleure poudre, je l' exposai à l' accoutumé sur le feu, & elle ne détonna pas avec moins de force que l' ordinaire, j' oserais même avancer qu' elle était plus forte.

62. Ensuite donc des réflexions que nous avons fait sur ce sel, & rémarquant ici que c' est l' alkali le plus puissant qu' il y ait, après celui qu' on retire des cendres des plantes terrestres, il me parait que l' on doit conclure que la différence des effets qu' on voit arriver en faisant décomposer un mélange de souffre & de salpêtre, & un mélange de souffre, de salpêtre, & de sel de tartre, ne dépend aucunement de l' humidité, & que l' alkalinité est celle qui les produit.

63. J' ai cependant encore voulu m' assûrer s' il ne se trouve point d' autres causes qui agissent aussi; il me paraissait que le dègré de chaleur dévait y contribuer. J' ai à cet effet tenté de faire du foye de souffre avec un alkali volatil, & m' étant reussi, je le mélai avec du salpêtre, mais le mélange ne fit aucune explosion, probablement parcequ'-il s' est dissipé avant que le salpêtre ait pû se décomposer; de façon qu' il parait clair qu' il est nécessaire

que

que les matiéres du mélange puissent acquérir un certain dégré de chaleur.

64. Je pense que l'action de l'alkali sur les autres matiéres vient de ce que, dans le tems que les substances se fondent, il se forme un foye de souffre dans lequel le phlogistique étant uni à un sel neutre, il s'en sépare moins difficilement que lorsqu'il ne se trouve qu'avec l'acide vitriolique, dans le souffre même, & qu'il peut par conséquent se dévèlopper avec plus de vitesse pour détonner avec l'acide nitreux, tout ceci semble encore être confirmé par les expériences que j'ai fait.

65. En prémier lieu ayant substitué du charbon au souffre il ne s'ensuivit plus aucune fulmination, mais comme dans ce cas le phlogistique a pour base des parties terrestres, & l'alkali n'ayant aucune action particuliére sur cette terre, le dévèloppement du phlogistique ne peut pas être favorisé.

66. Je fis ensuite une poudre composée successivement de plusieurs doses de tartre vitriolé, de charbon, & de salpêtre, croyant qu'il se serait peut-être fait un foye de souffre, lequel en se décomposant avec le salpêtre aurait pû faire le mêmes effets que la poudre fulminante, mais il ne me reussit pas, & ce mélange au contraire fit un explosion plus lente que si je n'y avais point mis du tartre vitriolé, ce qui me fait croire que le dégré de chaleur nécessaire au salpêtre pour se décomposer avec le charbon, est moindre, que celui qui est nécessaire pour faire ce foye de souffre (*f*) & que par conséquent le charbon détonne avec le salpêtre avant que le phlogistique puisse s'unir au tartre vitriolé, & faire le foye de souffre.

t 67. Je

(*f*) On voit aisément que le foye de souffre dont je parle ne peut pas se faire à une chaleur aussi modique que celui qu'on fait comunement.

67. Je fis enfin divers mélanges de charbon, & de salpêtre, auxquels j' ajoutai l' acide vitriolique uni à différentes bases, affin d' avoir une espéce de poudre fulminante, dont les combinaisons des composans fussent variées, mais je n'ai pas réussi non plus que dans celle du tartre vitriolé, je crois que ce que j' ai dit par rapport à celle-là sert aussi pour donner la raison de ce que je viens d' exposer. Il me reste encore bien des recherches, que je me suis proposé sur la poudre à canon, sur celleci, & sur le rapport, que peuvent avoir avec elles les métaux fulminans, mais je me réserve de traiter plus amplement de la prémiére dans la traduction que je donnerai de l' ouvrage de Mr. Benjamin Robins; qui à déja été enrichi par les notes que le grand Géomètre Mr. Euler y a fait; & j' aurai occasion une autre fois de parler des deux derniéres.

RE-

RECHERCHES
SUR LA NATURE, ET LA PROPAGATION DU SON.
PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

INTRODUCTION.

QUOIQUE la Science du Calcul ait été portée dans ces derniers tems au plus haut dégré de perfection, il ne paroit cependant pas qu' on se soit beaucoup avancé dans l'application de cette Science aux phénomènes de la Nature. La Thèorie des fluides qui est assurément une des plus importantes pour la Physique, est encore très imparfaite dans ses élémens, malgré les efforts de plusieurs grands Hommes qui

qui ont tenté de l'approfondir. Il en est de même de la matière que j' entreprens d' examiner ici, & qu' on peut avec raison regarder comme un des principaux points de cette Théorie. Car le Son ne consistant que dans de certains ébranlemens imprimés aux corps sonores, & communiqués au milieu élastique qui les environne, ce n'est que par la connoissance des mouvemens de ce fluide, qu' on peut espérer de découvrir sa véritable nature, & de déterminer les lois qu' il doit suivre dans sa propagation.

Newton, qui a entrepris le premier de soummetre les fluides au calcul, a aussi fait sur le Son les premiéres recherches; & il est parvenu à en déterminer la vitesse par une formule, qui ne s' éloigne pas beaucoup de l' expérience. Mais si cette théorie a pû contenter les Physiciens dont la plûpart l' ont adopté, il n' en est pas de même des Géomètres qui en étudiant les démonstrations sur lesquelles elle est appujée, n' y ont pas trouvé ce degré de solidité, & d' évidence qui caractérise d' ailleurs le reste de ses Ouvrages. Cependant aucun que je sache, ne s' est jamais attaché à découvrir, & à faire connoitre les principes qui peuvent les rendre insuffisantes; encore moins a-t-on entrepris de leur en substituer de plus surs, & de plus rigoureux (*).

Les

(*) Voici comment parle un des plus Célebres Géomètres de nôtre tems dans son excellent traité des fluides art. 219. *Ce séroit ici le lieu de donner des Méthodes pour déterminer la vitesse du son, mais j' avoue que je ne suis point encore parvenu à trouver sur ce sujet rien qui pût me satisfaire. Je ne connois jusqu' à présent que deux Auteurs qui ayent donné des formules pour la vitesse du son, savoir M. Nevvton dans ses Principes, & M. Euler dans sa dissertation sur le feu qui a partagé le prix de l' Académie en 1738. La formule donnée par M. Euler sans démonstration est fort différente de celle de M. Nevvton; & j' ignore quel chemin l' y a conduit; à l' égard de la formule de M. Nevvton elle est démontrée dans ses Principes, mais c'est peut être l' endroit le plus obscur, & le plus difficile de cet Ouvrage. M. Jean Bernoulli le fils dans la Piéce sur la Lumiére, qui a remporté le prix de l' Académie en 1736., dit qu' il n' oseroit pas se flatter d' entendre cet endroit des Principes ec.*

Les Commentateurs des *Principes* ont à la verité tâché de rétablir cet endroit par une Méthode purement analitique, mais outre qu' ils n' ont envifagé la queftion que fous un point de vüe tout-a-fait particulier, leurs calculs font d' ailleurs fi compliqués, & embaraffés dans des fuites infinies, qu'il ne paroit pas, qu' on puiffe en aucune façon acquiefcer aux conclufions qu' ils fe font efforcés d' en déduire.

J'ai donc cru qu' il étoit néceffaire de reprendre toute la queftion dans fes fondemens, & de la traiter comme un fujet entiérement nouveau, fans rien emprunter de ceux qui peuvent y avoir travaillé jufqu' à préfent.

Tel eft l' objet que je me fuis propofé dans les Recherches fuivantes. Pour le faire mieux connoitre je commence par donner une idée de la théorie de M. Newton; & des difficultés aux quelles elles eft fujette.

C'eft dans la fection VIII. du II. Livre des *Principes* que fe trouve renfermée toute cette théorie. L' Auteur confidére d'abord la propagation du mouvement dans les fluides élaftiques, & la fait confifter dans des dilatations, & des compreffions fucceffives, qui forment comme autant de pulfations, & qui fe répandent à la ronde par tout le fluide. Il paffe enfuite à examiner comment ces pulfations peuvent être produites par le frémiffement des parties d' un corps fonore quelconque. Il imagine pour cela qu' une particule du fluide pouffée par les vibrations du corps contigu condenfe par une certaine diftance les particules fuivantes, jufqu' à ce que la condenfation étant devenue la plus grande, les mêmes particules comencent à fe dilater de part, & d' autre; ce qui forme felon lui une infinité de fibres fonores qui partent toutes du même point, comme d' un centre commun. Il veut de plus que chacune de ces premiéres fibres en engendre une autre égale à fon extremité,

lorſqu' elle a achevé une oſcillation entière, & celle-ci une troiſiéme, & ainſi ſucceſſivement, de ſorte qu'il ſe forme, pour ainſi dire, autour du corps ſonore pluſieurs voutes ſphériques, qui aillent toujours en s'élargiſſant, tout de même, comme l' on obſerve dans les ondes, qui s' excitent ſur la ſurface d' une eau tranquille, par l' agitation de quelque corps étranger que ce ſoit.

Voila quels doivent être ſelon cet Illuſtre Auteur les mouvemens des particules de l' air qui produiſent, & propagent le ſon. Mais M. Newton eſt encore allé plus loin; il a calculé tous les mouvemens particuliers, qui compoſent chacune des pulſations. Pour y parvenir il regarde les fibres élaſtiques de l' air comme compoſées d' une infinité de points phyſiques diſpoſés en ligne droite, & à égale diſtance les uns des autres. La méthode qu'il emploie pour déterminer les oſcillations de ces points conſiſte à les ſuppoſer d' abord iſochrones, & toujours les mêmes dans chacun d' eux. M. Newton prouve enſuite que cette hypothéſe s' accorde entierement avec les Loix méchaniques qui dépendent de l' action mutuelle, que les points exercent en vertu de leur reſſort; d' ou il conclut, qu'en effet ces mouvemens ſont tels qu'il les a ſuppoſé; & comme à chaque oſcillation il doit s' engendrer ſelon lui une nouvelle fibre égale, & ſemblable à la première, il trouve l'eſpace, que le ſon parcourt dans un tems donné en calculant ſeulement la durée d' une ſimple vibration.

M. Jean Bernoulli le fils dans ſon excellente Piéce ſur la Lumiére a auſſi déterminé d' après les mêmes hypothéſes la viteſſe du ſon; ſon procédé différe pourtant de celui de M. Newton en ce qu' il a d' abord ſuppoſé que les vibrations des particules ſont parfaitement iſochrones; ce qui eſt précíſément, ce que ce Grand Géomètre s'étoit propoſé de démontrer. Auſſi n' eſt-il pas ſurprenant que ces deux Auteurs

teurs ſoient arrivés à la même formule pour la viteſſe du ſon: et l' accord apparent de leurs calculs ne peut être apporté comme une preuve des fondemens de la Théorie qu' on vient d' expoſer (*).

A l'égard des premiéres propoſitions ſur la formation des fibres élaſtiques, & ſur tout de leur comparaiſon avec les ondes, je crois inutile de m' arrêter davantage à les examiner. Car outre que pluſieurs Auteurs en ont déja fait voir le peu de ſolidité, & l' inſuffiſance même pour l' explica-

(*) M. Bernoulli prouve à la vérité dans l'Ouvrage cité, que tout corps qui eſt tenu en équilibre par deux puiſſances égales, & directement contraires, s'il vient à être tant ſoit peu déplacé doit faire autour de ſon point de repos des oſcillations ſimples, & réguliéres. Mais cette théorie n' eſt guere applicable qu' au ſeul cas, ou il n' y ait qu' un corps mobile. Pour le faire ſentir, ſuppoſons d'abord ſelon cet Auteur, que le corps ſoit ſollicité ſelon deux diréctions contraires par les forces égales P, & Q, il eſt clair que ces forces ne pourront être que des fonctions de la diſtance du corps à un point fixe quelconque; donc ſi on lui fait parcourir une eſpace infiniment petit ds la ſomme des accroiſſement de ces deux forces ſera exprimé par pds, ce qui donnera par conſéquent la force accélératrice qui porte le corps vers ſon point d' équilibre; & comme on ne veut conſidérer que les mouvemens infiniment petits on ſuppoſera p conſtant, d' ou la force donnée déviendra proportionelle à la diſtance à parcourir ds, & les oſcillations ſe feront ſelon les loix connues de l' Iſocroniſme. Mais il n' en ſera pas de même s' il y a pluſieurs corps qui ſe ſoutiennent mutuellement en équilibre, quoique rangés tous ſur la même droite. Dans ce cas les forces P, Q, P^{I}, Q^{I}, P^{II}, Q^{II} qui agiſſent ſur chacun d'eux ſeront des fonctions de leurs diſtances intermédiaires, ainſi ds^{I}, ds^{II}, ds^{III} repréſentant les déplacemens infiniment petits de tous les corps, on aura pour les forces accélératrices des expreſſions de cette forme $pds^{I} + qds^{II} + rds^{III}$, ou p, q, r &c. peuvent être regardées comme conſtantes. D' ou il eſt aiſé de comprendre que les mouvemens des corps, ne ſeront plus aſtreints au ſimple iſochroniſme; & c' eſt proprement ce qui arrive aux particules des fibres élaſtiques de l' air. C' eſt auſſi par cette raiſon que le calcul qu'on trouve dans le Commentaire des *Principes* ſeroit encore inſuffiſant même quand il ne renfermeroit pas des approximations; puiſque on n' y conſidére que trois, ou quatre particules mobiles. M. D. Alembert a fait ſentir cette difficulté pour le cas d' une corde vibrante chargée de pluſieurs pétits poids pag. 359. des Mémoires de Berlin pour l' année 1750.

plication des phénomènes du Son (*); la maniére avec laquelle elles ſont préſentées dans les *Principes* fait voir évidemment que l' Auteur ne les adoptoit, que comme des ſimples hypothèſes pour ſimplifier la nature d' un problême aſſés composé de lui même. Et quand même ces hypothèſes ſeroient vraies, ne ſeroit-on pas en droit d' en exiger une démonſtration? Or cette démonſtration doit néceſſairement dépendre de la réſolution générale du problême propoſé. Il faut donc avoüer que la Théorie de M. Newton ſeroit même à cet égard bien éloigné de pouvoir entiérement ſatisfaire à ſon objet. Mais il y a plus le Théorème dans lequel il détermine les loix des oſcillations des particules eſt fondé ſur des principes inſuffiſants, & même fautifs.

Le Célèbre M. Euler paroit s' en être apperçu dés l' année 1727., comme l'on voit dans une Théſe ſur le Son ſoutenue à Bale la même année. Cependant M. Cramer eſt, je crois, le premier qui en ait donné une preuve ſolide, & convainçante (**). Il fait voir que le procédé de M. Newton peut égalemment s'appliquer à démontrer cette autre propoſition ſavoir : que les particules élaſtiques ſuivent dans leurs mouvemens les lois d'un corps peſant qui monte, & qui tombe librement; ce qui eſt tout-a-fait incompatible avec l' iſochroniſme des oſcillations, que l'Illuſtre Auteur Anglois a prétendu établir. Cette remarque ſeule paroitroit ſuffire pour faire tomber entierement la Théorie en queſtion. Cependant comme les grands Hommes ne doivent être jugés, que d' aprés l' examen le plus exact, & le plus rigoureux, l' on auroit tort de la rejet-

ter

(*) Voies la ſuite de l' article des fluides cité ci-deſſus. Vojés encore le Mémoire de M. de Mairan dans l' Académie de Paris année 1737., la Phyſique de Perrault, & d' autres.

(**) Vojés les Commentaires des *Principes*.

ter, avant que d'en avoir démontré l' insuffisance d' une maniére qui ne laissa plus rien à désirer.

Voila le premier pas que j' ai pensé dévoir faire en entrant dans les recherches que je m' étois proposé sur la nature, & la propagation du son.

J' ai donc commencé par étudier avec toute l' attention dont j'ai été capable les propositions de M. Newton dont il s'agit, & j' ai trouvé en effet qu' elles sont fondées sur des suppositions incompatibles entr' elles, & qui portent nécessairement à faux. C' est ce que j'ai taché de faire voir par deux voies différentes dans le premier Chapitre de la Dissértation suivante. Cet objet ainsi rempli, je me suis appliqué à rechercher des méthodes directes, & générales pour résoudre le problême proposé, sans emploier d' autres Principes que ceux qui tiennent immédiatement aux lois connües de la Dinamique.

Pour donner à mes recherches le plus de généralité qu' il est possible, & pour les rendre en même tems applicables à ce qui se passe réellement dans la nature, j'ai d' abord envisagé la question sous le même point de vue sous lequel tous les Géomètres, & les Physiciens l'ont regardé jusqu'ici; & je doute qu' on puisse jamais reduire le problême sur les mouvemens de l' air qui produisent le son, à un énoncé plus simple, que celui-ci. Savoir.

Etant donné un nombre indefini de particules élastiques rangées en ligne droite qui se soutiennent en équilibre, en vertu de leurs forces mutuelles de répulsions, déterminer les mouvemens, que ces particules doivent suivre dans le cas qu' elle aient été, comme que ce soit, dérangées, sans sortir de la même droite.

Pour en faciliter la résolution, je suppose seulement que les particules sont toutes de même grandeur, & doüées d' une même force élastique, & de plus, que leurs mouvemens

vemens ſont toujours infiniment petits: conditions que je ne crois pas pouvoir porter la moindre atteinte à la nature du problême enviſagé phyſiquement.

En examinant les équations trouvées d'aprés ces ſeules *données*, je me ſuis bientôt apperçu qu' elles ne différoient nullement de celles qui appartienent au problême *de chordis vibrantibus*, pourvu qu' on ſuppoſe les mêmes corpuſcules, diſpoſés de la même maniére dans un cas que dans l' autre; d' ou il s' enſuit qu' en augmentant leur nombre à l' infini, & diminuant les maſſes dans la même raiſon, le mouvement d' une fibre ſonore dont les particules élaſtiques ſe touchent mutuellement, doit être comparé à celui d' une corde vibrante correſpondante (*).

Ceci m' a donc conduit à parler des théories, que les grands Géomètres, Mrs. Tailor, D' Alembert, & Euler ont donné ſur ce ſujet. J' expoſe en peu de mots leurs différents, & les objeftions que M. Daniel Bernoulli a fait aux deux derniers; & aprés avoir ſoigneuſement examiné les raiſons des uns, & des autres, j' en conclus que les calculs, qu' on a fait juſqu'à préſent, ne ſauroient décider de telles queſtions, & que c' eſt néceſſairement à la ſolution générale que nous avons en vue qu' il faut s' en rapporter.

J' entreprens donc cette ſolution dont l' analiſe me paroit en elle même neuve, & intéreſſante, puiſque il y a un nombre indéfini d' équations à réſoudre à la fois. Heureuſement la méthode que j' ai ſuivi m' a mené à des formules qui ne ſont pas fort compoſées, eu égard au grand nom-

(*) C' eſt une juſtice que l' on doit ici au Célèbre M. D' Alembert, que de faire remarquer qu' il avoit déja trouvé ce rapport entre les deux problêmes mentionées dans l' art. XLVI. de ſon premier Mémoire ſur les cordes vibrantes dans l' Académie de Berlin. Mais il ne paroit pas, du moins que je ſache, qu'il en ait jamais fait aucun uſage.

nombre d' opérations, par où j' ai été obligé de paſſer. Je conſidére d' abord ces formules dans le cas, ou le nombre des corps mobiles eſt fini, & j'en tire aiſément toute la théorie du mélange des vibrations ſimples, & régulières que M. Daniel Bernoulli n'a trouvé que par des voies particuliéres, & indiréctes. Je paſſe enſuite au cas d'un nombre infini de corps mobiles, & après avoir prouvé l' inſuffiſance de la théorie précédente dans ce cas, je tire de mes formules la même conſtruction du problême *de chordis vibrantibus*, que M. Euler a donné, & qui a été ſi fort conteſtée par M. D'Alembert. Je donne de plus à cette conſtruction toute la généralité dont elle eſt capable, & par l'application que j' en fais aux cordes de Muſique, j'obtiens une démonſtration générale, & rigoureuſe de cette importante verité d' expérience, ſavoir: que quelque figure qu'on donne d' abord à la corde la durée de ſes oſcillations ſe trouve néanmoins toujours la même (*).

A cette occaſion je développe la Théorie générale des ſons harmoniques, qui réſultent d'une même corde, de même que celle des inſtrumens à vent. Quoique ces deux théories aient été déja propoſées, l' une par M. Sauveur, & l' autre par M. Euler, cepandant je crois être le premier qui les ait immédiatement déduit de l' Analiſe.

Je viens maintenant au principal objet de mes recherches, ſavoir aux loix de la propagation du ſon. Je ſuppoſe qu'une particule d' air reçoive du corps ſonore une impulſion quelcon-

(*) Le ſavant M. D'Alembert cité ci-deſſus dans l' article III. de ſon Addition au mémoire des cordes vibrantes, imprimée dans le tome de l'Académie de Berlin pour l' année 1750., fait à ce propos la remarque ſuivante. *Il eſt vraiſemblable qu'en général quelque ſigure que la corde prenne, le tems d'une vibration ſera toujours le même, & c' eſt ce que l' expérience paroit confirmer, mais ce qui ſeroit difficile, peut être impoſſible de démontrer en rigueur par le calcul*. Je ne rapporte ces parolès d' un ſi grand Géomètre, que pour donner une idée de la difficulté du problême que j' ai réſolu.

conque, je trouve par l' application des mes formules qu' il ſe communique d' une particule à l' autre un mouvement qui n' eſt qu' inſtantané, & qui ne dépend en rien de la force du premier ébranlement. La viteſſe avec laquelle ſe fait cette communication eſt déterminée par la même formule, que M. Newton avoit déja donné pour la viteſſe du Son, & dont les réſultats ſe trouvent aſſés conformes à l' expérience. Le calcul me conduit ici à traiter des échos ſimples, & compoſés, & la théorie que j' établis n' eſt ſujette à aucune des difficultés qui ſe rencontrent dans l' explication, que le Phyſiciens en ont donné juſqu' à préſent. Ces recherches ſont ſuivies d' un examen du mélange des ſons, & de la maniére avec laquelle ils peuvent ſe répandre dans le même eſpace ſans ſe troubler, ou ſe confondre en aucune façon. Je tire enfin de mes formules une explication rigoureuſe, & inconteſtable de la réſonance & du frémiſſement naturel des cordes harmoniques au bruit de la principale; Phénomène connu dépuis long-tems, & pour lequel on a inventé pluſieurs ſiſtèmes, ſans être parvenu à en donner une raiſon ſatisfaiſante.

Voila les principaux objets que j'ai traité dans la Diſſértation préſente, & que le défaut de tems, & quelques autres obſtacles imprévus m' ont empêché d' expliquer avec plus d' ordre, & de netteté. Je ſuis bien éloigné de croire qu' elle contienne une théorie complette ſur la nature, & la propagation du ſon; mais ce ſera du moins avoir contribué à l'avancement des Sciences Phyſico-Mathématiques, que d' avoir démontré par le calcul pluſieurs verités qui avoient juſqu' ici paru inexplicables dans la nature; et l'accord de mes réſultats avec l'expérience ſervira peut-être à détruire les préjugés de ceux qui ſemblent déſeſpérer, que les Mathématiques ne puiſſent jamais porter des vrayes lumiéres dans la Phyſique. C' eſt un des principaux buts que je m' étois propoſé pour le préſent.

RE-

SECTION PREMIERE.

Recherches ſur la nature du ſon.

CHAPITRE PREMIER.

Des oſcillations des parties intimes des fluides élaſtiques.

1. J'Entreprens avant tout d'examiner la Théorie, que M. Newton a renfermée dans la ſection VIII. du II. Livre des Principes Mathématiques. Laiſſant a part toute diſcuſſion ſur la formation des ondes, & des fibres ſonores, dont on a parlé dans l'Introduction, je m'attache principalement à l'Analiſe du théorême, dans lequel il prétend établir, que chaque particule d'un fluide élaſtique homogéne ſuit dans ſes mouvemens les mêmes loix, qu'un pendule qui décrit une cicloide dont la longueur égale l'excurſion totale de la particule, & ou la peſanteur qui l'anime eſt équivalente à l'élaſticité naturelle du fluide. Pour démontrer que cette propoſition eſt conforme à la vérité, ſuppoſons d'abord, dit M. Newton, qu'elle le ſoit en effet, & voyons ce qui s'enſuivra. Il cherche donc d'après une pareille ſuppoſition la force accélératrice des particules, & il trouve que cette force eſt préciſément la même, qui fait mouvoir un pendule dans des arcs de la cicloide donnée. Pour faire mieux ſentir l'inexactitude, & l'inſuffiſance du procédé qui l'a conduit à cette concluſion, j'ai cru devoir convertir le théorême en problême, en ſuppoſant d'abord inconnuë, ou indeterminée la loi des mouvemens

vemens qu' on se propose de trouver. Pour cela il n'y a d' autres changemens à faire aux propositions de M. Newton, que de substituer au lieu du cercle dont les arcs expriment les tems, & les coupées les espaces parcourus, une autre courbe quelconque qui fasse la même fonction.

Je rapporterai donc ici la proposition dont il s' agit, & j' aurai soin de me servir des mêmes expressions de l' Auteur autant qu' il me sera possible.

Propositio XLVII. LIB. II. Problema.

2. Pulsibus per fluidum elasticum propagatis invenire legem, qua singulae fluidi particulae motu reciproco brevissimo euntes, & redeuntes accelerantur, & retardantur.

Designent (Fig. 1.) *AB*, *BC*, *CD* &c. *pulsuum successivorum aequales distantias*, *ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati*; *E*, *F*, *G puncta tria physica medii quiescentis in recta AC ad aequales ab invicem distantias sita*; *Ee*, *Ff*, *Gg spatia aequalia perbrevia, per quae puncta illo motu reciproco singulis vibrationibus eunt, & redeunt*; ε, φ, γ *loca quaevis intermedia eorundem punctorum*; *& EF*, *FG lineolas physicas, seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca* $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$, *& ef*, *fg*. *Rectae Ee aequalis ducatur recta PS*; Et super ipsa describatur curva in se rediens *PHShP*. (Fig. 2.) *Per hujus* peripheriam *totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipsius partibus proportionalibus, sic ut completo tempore quovis PH, vel PHSh, si demittatur ad PS perpendiculum HL, vel hl, & capiatur E*ε *aequalis PL vel Pl, punctum physicum E reperietur in* ε; *hac lege punctum quodvis E eundo ab E per* ε *ad e, & inde redeundo per* ε *ad E vibrationes singulas peraget*, prout fert natura curvae propositae *PHShP*; invenienda est hujusmodi curva. *In* peripheria *PHSh capiantur aequales arcus HI*, *IK*, *vel hi*,

i k eam habent rationem ad peripheriam *totam, quam habent aequales rectae E F, F G ad pulsuum intervallum totum B C, & demissis perpendiculis I M, K N, vel i m, k n, quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu, & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C, si P H, vel P H S h sit tempus ab initio motus puncti E erit P I, vel P H S i tempus ab initio motus puncti G, & propterea E ε, F φ, G γ erunt ipsis P L, P M, P N in itu punctorum, vel ipsis P l, P m, P n in punctorum reditu, aequales respective. Unde ε γ seu E G + G γ — E ε in itu punctorum aequalis erit E G — L N in reditu autem aequalis E G + l n; sed ε γ latitudo est, seu expansio partis Medii E G in loco ε γ; & propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut E G — L N ad E G, in reditu autem ut E G + l n, seu E G + L N ad E G . . . .*
Unde vis elastica puncti F in loco ε γ est ad ejus vim elasticam mediocrem in loco E G ut $\frac{1}{EG - LN}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ *in itu; in reditu vero ut* $\frac{1}{EG + ln}$ *ad* $\frac{1}{EG}$; *& eodem argumento vires elasticae punctorum physicorum E, & G in itu sunt ut* $\frac{1}{EG - MR}$ *&* $\frac{1}{EG - QM}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ (ductis scilicet (Fig. 3.) perpendiculis *D R*, F *Q*, quae intercipiant partes arcus *F H, K D* aequales ipsis *H I, I K*), *& virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut* $\frac{QM - MR}{(EG - MR)\times(EG - QM)}$ *ad* $\frac{1}{EG}$; *hoc est ut* $\frac{QM - MR}{EG^2}$ *ad* $\frac{1}{EG}$, *sive ut Q M — M R ad E G, si modo (ob angustos vibrationum limites) supponamus M R, Q M indefinite minores esse quantitate E G; quare cum quantitas E G detur, differentia virium est, ut*

 RM

$QM - MR$. *Sed differentia illa (ideſt exceſſus vis elaſticae puncti* ε *ſupra vim elaſticam puncti* γ *) eſt vis qua interjecta Medii lineola phyſica* $\varepsilon\gamma$ *acceleratur , & propterea vis acceleratrix lineolae phyſicae* $\varepsilon\gamma$ *eſt, ut* differentia linearum QM, & MR; igitur ex Mechanicae principiis differentia iſta eſſe debebit, ut fluxio ſecunda ſpatii quod deſcribitur a particula $\varepsilon\gamma$, poſita ſcilicet fluxione prima temporis conſtante. Jam vero quoniam ex hypoteſi tempora exprimuntur per arcus, & ſpatia per abſciſſas reſpondentes erunt MR, & QM fluxiones primae ſpatiorum PR, PQ, adeoque $QM - MR$ aequabitur fluxioni ſecundae ſpatii PR, vel etiam PM, quod ab illo infinite parum differt; quum itaque partes arcus DI, IF aequentur inter ſe habebimus ad determinandam curvam $PHSh$ ſequentem aequationem identicam $QM - MR = QM - MR$, ſeu $o = o$ quod nihil indicat.

3. Cette concluſion vague, & indéterminée, que nous venons de trouver, nous apprend donc clairement la raiſon pour laquelle les principes de M. Nevvton peuvent nous conduire également à des réſultats très différens entr' eux, comme M. Cramer l'a ingénieuſement démontré dans l'hypothéſe, que les particules élaſtiques ſuivent dans leurs mouvemens la même loix, que les corps peſans qui montent, ou qui deſcendent alternativement. Mais ſuivons encore la théorie de M. Newton, & paſſons à la propoſition 49. dans laquelle il détermine le tems que chaque particule doit employer à faire une oſcillation entière. Or comme de la propoſition précédente il réſulte que toute courbe rentrente $PHShP$ peut également exprimer la rélation entre les eſpaces, & les tems, l'on ſera auſſi bien en droit de ſubſtituer au cercle dans cette propoſition une courbe quelconque, & d'y appliquer généralement les mêmes raiſonnemens que M. Newton a fait ſur ſon hypothéſe particulière. Soit donc

PRO-

Propositio XLIX. *Problema*.

4. *Datis Medii densitate, & vi Elastica invenire velocitatem pulsuum.*

Fingamus Medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi, sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adaequet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis, & centrum oscillationis sit A, & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu, & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiae circuli radio A descrlpti aequale. Nam stantibus, quae in Prop. 47. *constructa sunt, si lineola quaevis physica E F singulis vibrationibus describendo spatium P S urgeatur in* loco quovis $\varepsilon\varphi$ *a vi Elastica; quae* eadem omnino sit, quam proposita spatiorum, & temporum scala $PHShP$ requirit seu $= \frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, denotante M massam, seu pondus lineolae physicae EG, peraget haec vibrationes singulas tempore PHS, & oscillationes integras tempore $PHShP$; *id adeo, quia vires aequales aequalia corpuscula per aequalia spatia simul impellent* . . . .

Sed vis elastica, qua lineola physica E G in loco quovis $\varepsilon\gamma$ *existens urgetur erat (in demonstratione* Prop. 47.) *ad ejus vim totam elasticam, ut* $QM - MR$ *ad* EG; *& vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola E G comprimitur est ad pondus lineolae, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolae longitudinem E G, adeoque ex aequo vis, qua lineola E G* in loco quovis $\varepsilon\gamma$ *urgetur, est ad lineolae illius pondus, ut* $(QM - MR)A$ *ad* EG^2 hinc vis ista erit ad vim superius inventam $\frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, ut

A

$\frac{A}{EG^2}$ ad $\frac{1}{HK^2}$. Porro $HK = 2KI$ & $EG = 2EF$; unde quum ex constructione propositionis antecedentis habeatur $KI : EF = PHShP : BC$ erit etiam $HK : EG = PHShP : BC$ unde proportio virium supra inventa transmutabitur in hanc $\frac{A}{BC^2} : \frac{1}{[PHShP]^2}$. *Quare cum tempora, quibus aequalia corpora per aequalia spatia impelluntur sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa elastica, ad tempus* $PHShP$ *in subduplicata ratione* $\frac{BC^2}{A} : (PHShP)^2$, seu ut $\frac{BC}{\sqrt{A}} : PHShP$. Quum itaque consequentia in hac analogia eadem sint, aequalia esse debebunt & antecedentia; hinc orietur tempus vibrationis unius lineolae EG urgente vi elastica $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. *Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compositae pulsus progrediendo conficit latitudinem suam* BC; *ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium* BC erit $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. *Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium* BC *est ad tempus, quo percurret longitudinem circumferentiae* circuli, cujus radius est A *aequalem in eadem ratione*, scilicet, ut $BC : \pi A$ (posita scilicet pro π ratione circumpherentiae ad radium) adeoque erit hoc tempus $= \frac{\pi A}{\sqrt{A}} = \pi\sqrt{A}$; sed ex theoria pendulorum reperitur etiam tempus oscillationis unius penduli longitudinis A $= \pi\sqrt{A}$; *ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiae aequalem.*

5. Voila donc un nouveau paradoxe déduit des Principes de Mr. Newton, savoir que quelle que soit la loi des mouvemens des particules élastiques le tems des oscil-

lations

lations eſt néanmoins toujours le méme. Ces deux propoſitions que nous venons de détailler, contiennent toute la théorie que cet Auteur a donné concernant les mouvemens de l'air qui font l'objet principal de la Diſſertation préſente, c'eſt pourquoi nous les examinerons ici avec tout le ſoin poſſible. Pour peu qu'on reflèchiſſe ſur la nature des démonſtrations précédentes, on s'apperçevra ſans peine que les défauts de cette théorie dépendent moins de l'enchainement des raiſonnemens que des Principes, & des *donnèes* que l'Auteur adopte tacitement pour la ſolution du problême. Ces *données* étant développées ſe réduiſent aux ſuivantes. 1.^{mo} Que les mouvemens de toutes les particules ſoient exprimés par le même lieu géométrique, d'où il ſuit qu'il doivent être tous d'une même nature. 2.^{do} Que ces particules ſe communiquent le mouvement dans des tems égaux, enſorte qu'elles viennent toutes à paſſer ſucceſſivement par les mêmes dégrés de mouvement. Il eſt conſtant qu'on ne peut admetre aucune de ces ſuppoſitions, ſi on n'a auparavant démontré qu'elles ſont des conſéquences néceſſaires des conditions données du problême. Or tant s'en faut que dans notre cas la choſe ſoit ainſi, qu'au contraire ce ſont ces mêmes conditions qui détruiſent entiérement celles qui dépendent de l'action mutuelle, que les parties exercent en vertu de leurs forces répulſives. Pour développer cette difficulté dans toute ſon étendue, ainſi que l'importance de la matiére, & l'autorité du grand Homme, dont les égaremens mêmes nous ſont inſtructifs, ſemblent l'exiger, je vais donner l'Analiſe pure & exacte du problême, dont il s'agit telle, que peuvent la fournir les premiers Principes de Mécanique.

6. Soient ſelon les premiéres ſuppoſitions de Mr. Newton (Fig. 1.) *E*, *F*, *G &c.* des Points Phyſiques qui compoſent le milieu élaſtique, lorſqu'il eſt en repos; ſoient enſuite

ensuite parvenus ces mêmes points en ε, φ, γ, de sorte qu'il restent néanmoins dans la même ligne droite BC; qu'on dénote les espaces rectilignes parcourus $E\varepsilon$, $F\varphi$, & $G\gamma$ par y^{I}, y^{II}, y^{III}, & supposant que la premiére distance EF, FG entre ces points soit $= r$, l'on aura $\varepsilon\varphi = r + y^{II} - y^{I}$; $\varphi\gamma = r + y^{III} - y^{II}$; or la force d'élasticité naturelle qui agit entre les points E, F, G est exprimée par $\frac{A \times M}{r}$, comme il est démontré dans la *Prop.* 49. ci-dessus, où M dénote le poid de chaque particule, & A est la hauteur d'une colomne homogéne du même fluide, dont la pesanteur égale le ressort naturel des particules; donc lorsque les points E, F, G viennent a être transportés en ε, φ, γ cette force d'élasticité se changera en $\frac{A \times M}{\varepsilon\varphi} = \frac{A \times M}{r + y^{II} - y^{I}}$ pour les points ε & φ, & en $\frac{A \times M}{\varphi\gamma} = \frac{A \times M}{r + y^{III} - y^{II}}$ pour les points φ & γ, & ainsi de suite; par conséquent la différence de ces deux forces donnera la force motrice de la particule intermédiaire φ, laquelle se trouvera $= AM \times \left(\frac{1}{r + y^{II} - y^{I}} - \frac{1}{r + y^{III} - y^{II}}\right)$, c'est à dire $= AM \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{(r + y^{II} - y^{I})(r + y^{III} - y^{II})}$. Mais, comme les particules sont supposées devoir faire des excursions assés petites, les différences $y^{II} - y^{I}$, & $y^{III} - y^{II}$ des espaces parcourus s'évanouiront auprès de la quantité r, d'où il résulte pour la force motrice de la particule F, $AM \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r^2}$, qui est celle qui fait parcourrir l'espace y^{II}. De la même maniére on trouvera pour les autres particules des expressions des forces motrices toutes semblables à celle-ci; d'où si l'on nomme t le tems écoulé depuis le commen-

cement

cement du mouvement de la particule E, & ſi l'on fait ſes différences dt conſtantes on obtiendra par les Principes de la Mécanique l'équation ſuivante qui contient les loix du mouvement de la particule F, ſavoir

$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2 A h}{T^2} \times \frac{y^{III} - 2 y^{II} + y^{I}}{r^2}$, où h eſt l'eſpace qu'un corps peſant parcourt librement en tombant durant le tems T; de même on aura pour la particule ſuivante G l'équation

$\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2 A h}{T^2} \times \frac{y^{IV} - 2 y^{III} + y^{II}}{r^2}$, & ainſi des autres.

En général, ſi l'expoſant de y exprime toujours la place que tient la particule qui parcourt l'eſpace y, en comptant depuis la premiére F, on trouvera pour le mouvement de la particule, dont le quantiéme du rang eſt m, l'équation générale $\frac{d^2 y^m}{dt^2} = \frac{2 A h}{T^2} \times \frac{y^{m+1} - 2 y^m + y^{m-1}}{r^2}$. Ces équations, comme il eſt aiſé de le voir, ſont en même nombre que les particules mobiles, dont on cherche les mouvemens; c'eſt pourquoi le problême étant déja abſolument déterminé par leur moyen, on eſt obligé de s'en tenir là, de ſorte, que toute condition étrangére qu'on voudra introduire, ne peut pas manquer de rendre la ſolution inſuffiſante, & même fautive. Mais pour connoître diſtinctément quelle atteinte doivent porter à l'Analiſe cideſſus expliquée les hypothéſes particuliéres que Mr. Newton a imaginées, pour faciliter peut être le problême qui de ſa propre nature eſt très-compliqué, nous allons réduire ces hypothéſes en formules.

7. Pour cela nous commencerons par remarquer que ſi t eſt le tems écoulé depuis le commencement du mouvement de la particule E, il faudra en vertu de la ſeconde hypothèſe qu'il ſe ſoit écoulé un tems $t + dt$, afin que la particule ſuivante F ait pû ſe mouvoir durant

un tems t; il faudra auſſi un tems $t + 2\,dt$ pour un mouvement ſemblable de la particule ſuivante G, & ainſi pour les autres; d'où il s'enſuit que, puiſque toutes les particules ſont ſuppoſées ſuivre les mêmes loix par l'hypothèſe premiére, l'eſpace parcouru par le point F, durant le tems t, ſera égal à l'eſpace parcouru par la particule G pendant le tems $t + dt$, & que l'eſpace parcouru par le point E pendant le tems t ſera le même que l'eſpace parcouru par la particule G dans le tems $t + 2\,dt$; or y^{I}, y^{II}, y^{III} expriment les eſpaces parcourus par les particules E, F, G, *&c.* dans le même tems t, on aura donc $y^{\text{II}} = y^{\text{III}} + dy^{\text{III}}$; $y^{\text{I}} = y^{\text{III}} + 2\,dy^{\text{II}} + d^2y^{\text{I}}$; maintenant ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de y^{I} & de y^{II}, dans l'expreſſion $y^{\text{III}} - 2\,y^{\text{II}} + y^{\text{I}}$, l'équation qui contient le mouvement de la particule F ſe changera en celle-ci $\frac{d^2y^{\text{II}}}{dt^2} = \frac{2\,Ah}{T^2} \times \frac{d^2y^{\text{III}}}{r^2}$; mais $y^{\text{II}} = y^{\text{III}} + dy^{\text{III}}$, & par conſéquent $d^2y^{\text{II}} = d^2y^{\text{III}} + d^3y^{\text{III}}$, l'on aura donc l'équation $\frac{d^2y^{\text{III}} + d^3y^{\text{III}}}{dt^2} = \frac{2\,Ah}{T^2} \times \frac{d^2y^{\text{III}}}{r^2}$, ou bien en négligeant le terme d^3y^{III}, & diviſant tout par d^2y^{III} nous aurons $\frac{1}{dt^2} = \frac{2\,Ah}{T^2r^2}$, équation, qui comme on voit, ne contient plus aucune des variables y^{I}, y^{II}, y^{III} *&c.* On trouvera par des raiſonnemens ſemblables que toutes les autres équations ſe réduiront encore à celle-ci, laquelle par conſéquent pourra être vraie quelles que ſoient les valeurs des y, pourvu que l'on ait $dt^2 = \frac{T^2r^2}{2\,Ab}$. Maintenant ſi l'on nomme θ le tems d'une oſcillation entiére, on aura $\theta = PHShP$ & $dt = KI$; par conſéquent $dt : EF = \theta : BC$; par la *Prop.* 49., ſavoir $dt = \frac{r\theta}{BC}$ & $dt^2 = \frac{r^2\theta^2}{BC^2} = \frac{T^2r^2}{2\,Ab}$; d'où l'on tire

$\theta^2 =$

$\theta^2 = \frac{BC^2 \times T^2}{2Ab}$ & $\theta = \frac{T \times BC}{\sqrt{2Ab}}$ qui eſt la même expreſſion que nous avons déja trouvé pour la meſure du tems dans la *Prop.* 49.

Tout ce que nous venons de démontrer ſuffit aſſés, ce me ſemble, pour faire connoître à fond l'inſuffiſance & la fauſſeté de la méthode de Mr. Newton. Nous allons donc chercher une autre voie qui nous mène à une ſolution du problême, dont il s'agit fondée ſur des Principes ſurs & inconteſtables.

8. Pour enviſager d'abord la queſtion ſous le point de vue le plus ſimple & le plus général qu'il ſoit poſſible, je regarde avec Mr. Newton les fluides élaſtiques comme des amas de corpuſcules, qui ſe fujent mutuellement ſelon les loix connues de l'élaſticité. Imaginons donc une ſuite de corps qui ayent tous la même maſſe, & qui ſoient rangés ſur une même ligne droite, à diſtances égales les uns des autres; ſuppoſons de plus que ces corps ſe répouſent mutuellement par des forces élaſtiques qui ſuivent la raiſon inverſe des diſtances; & pour contenir l'action continuelle de ces forces de répulſion, qui tendent ſans ceſſe à écarter les corps les uns des autres, qu'on conſidére les deux extrèmes comme fixes & immobiles, en ſorte que quelque mouvement qu'on excite dans leur ſiſtème, il demeure toujours renfermé entre les deux limites données. Maintenant ſoit le nombre des corps mobiles $= m - 1$, leur maſſe $= M$, la force du reſſort naturel $= E$, en conſervant les autres ſuppoſitions cideſſus (art. 6.), on trouvera que les mouvemens de tout le ſiſtème ſeront contenus dans les équations ſuivantes;

$$\frac{d^2 y^{I}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{II} - 2y^{I}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r}$$

 $d^2 y^{III}$

$$\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r}$$

Ces équations feront au nombre de $m - 1$, favoir en même nombre que les corps mobiles, & de plus toutes femblables, excepté la premiére & la derniére, dans lefquelles les quantités y° & y^m, qui repréfenteroient felon l'ordre établi les efpaces parcourus par le premier & dernier corps, doivent être à caufe de l'immobilité de ces corps, fuppofées égales, à zero; la derniére de ces équations fe trouvera donc

$$\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{-2y^{m-1} + y^{m-2}}{r}.$$

C'eft en intégrant toutes ces équations, & en tirant des valeurs pour chaque inconnue y^I, y^{II}, y^{III} &c. exprimées par la même variable t que l'on parviendra à déterminer les mouvemens de tous les corps qui compofent le fiftème propofé; mais avant que d'entrer dans ces recherches, il eft néceffaire de traiter des caufes qui peuvent produire de tels ébranlemens dans les parties intimes des fluides élaftiques. Nous nous bornerons ici aux cordes vibrantes, dont les mouvemens font plus connus, & qui, peut être, font les feuls de cette efpèce qui ne fe refufent pas à l'Analife.

CHA-

CHAPITRE II.

Des vibrations des cordes.

9. SOIT AB (Fig. 4.) une corde tant ſoit peu extenſible, & qu'on puiſſe conſiderer abſtraction faite de ſa gravité, & de ſa roideur ; ſuppoſons qu'elle ſoit attachée fixément aux deux points immobiles A, & B qui la tiennent tendue avec une force égale au poid P. Soit de plus cette corde chargée de tant de corpuſcules E, F, G &c. qu'on voudra, qui aient tous la même maſſe M, & qui ſoient éloignés les uns des autres, par des intervalles égaux AE, EF *&c.* Il eſt évident par les Principes de la Mécanique que, ſi les points E, F, G *&c.* viennent à être écartés de la ligne droite, enſorte qu'ils décrivent les lignes infiniment petites Ee, Ff, Gg *&c.* chacun de ſes points f ſera pouſſé vers F par une force égale à $P \times$ ſin: efg. Or ſi l'on nomme y^{I}, y^{II} *&c.*: les excurſions Ee, Ff *&c.* des corps E, F, & qu'on faſſe l'intervalle conſtant $AE = EF = r$ on aura ſin: $efg = \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r}$; d'ou l'on tire pour le mouvement du corps F l'équation $\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r}$ on trouvera de même pour le mouvement du corps ſuivant G, l'équation $\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r}$, & ainſi pour les autres. Par conſéquent ſi les corps attachés à la corde ſont au nombre de $m - 1$ on aura en général pour leurs mouvemens, qnels qu'ils ſoient, les équations ſuivantes.

$$\frac{d^2 y^{I}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{II} - 2y^{I}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r}$$

&c.

Dont le nombre ſera encore $m - 1$, & la derniére ſera exprimée par $\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{-2y^{m-1} + y^{m-2}}{r}$.

Il eſt viſible que toutes ces équation ſont entiérement ſemblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvemens des corps élaſtiques, & qu'il n'y a qu'à faire $P = E$, pour qu'elles deviennent tout-à-fait les mêmes; d'où il s'enſuit que les deux problêmes qui y répondent ſont de même nature, & qu'en en reſolvant un, on reſout l'autre en même tems.

Imaginons que le nombre des corps dans l'un & dans l'autre cas augmente à l'infini, & que leurs maſſes diminuent en même raiſon, les globules rangés en ligne droite formeront des fibres élaſtiques, telles qu'on peut les conçevoir dans l'air commun, & la corde tendue deviendra une corde uniformément épaiſſe dans toute ſa longueur, comme le ſont les cordes de Muſique; le même rapport ſubſiſtera donc encore entre les oſcillations des parties de l'une & de l'autre, par conſéquent la théorie des mouvemens des cordes étant connue, l'on pourra par une ſimple application en déduire celle des mouvemens de l'air qui produiſent le ſon. Ces deux problêmes ſont donc liés entr'eux, non ſeulement par leur nature même, mais encore par les Principes, d'où dépandent leurs ſolutions. Comme la matiére des vibrations des cordes a déja été traité par des grands Géométres, il ſera a propos de rappeller ici en peu de mots les principales méthodes qu'ils ont imaginé pour cela. J'entrerai dans ce détail d'autant plus volontier, que ces Auteurs ſont peu d'accord ſur les Principes, & dans les réſultats,

ce

ce qui pourroit faire douter de la généralité, & de la rigueur de leurs ſolutions.

10. Le premier qui ait tenté de ſoumettre au calcul le mouvement des cordes vibrantes eſt le célébre Mr. Tailor dans ſon excellent ouvrage *de Methodo Incrementorum*.

Il ſuppoſe d'abord, & il prétend même le démontrer que la chorde doit toujours prendre des figures telles, que tous ſes points arrivent en même tems à la ſituation rectiligne; d'où il déduit que ces figures ne peuvent être que celles d'une eſpèce de cicloides allongées, qu'il nomme *compagnes de la cicloide*. Voici ſon procédé.

Nommant x une abſciſſe quelconque (Fig. 5.) AE, & y l'ordonnée Ee qui dénote la diſtance du point E de la corde à l'axe dans un tems quelconque t, on démontrera par le même raiſonnement de l'art. 9., que la force accélératrice du point e vers E eſt exprimée par $-\frac{P}{M} \times \frac{d^2y}{dx}$. Soit a la longueur de toute la corde, & S ſon poid total on aura $M = \frac{S\,dx}{a}$; & par conſéquent la force accélératrice en e deviendra $= -\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$. Or afin que toute la corde puiſſe reprendre ſa ſituation rectiligne, l'Auteur ſuppoſe cette force proportionelle à la diſtance Ee, que le point e doit parcourir; ainſi en faiſant K égale a une ligne quelconque il obtient l'équation $-\frac{aP}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{K}$; d'où en faiſant $\frac{S}{aPK} = f$, il réſulte par les méthodes connues $x\sqrt{f} =$ Arc. ſin. $(\frac{y}{Y})$; & $y = Y$ ſin: $(x\sqrt{f})$, équation de la courbe pour un tems quelconque t, où l'ordonnée Y eſt la plus grande. Or comme le point e en parcourant l'eſpace eE eſt continuellement pouſſé par une force accélératrice proportionelle

nelle à l'eſpace qui reſte à parcourir, l'on aura $-\frac{d^2 y}{d t^2}$ $= \frac{2h}{T^2} \times \frac{y}{K}$, d'où ſi l'on fait encore pour abréger $\frac{2h}{T^2 K}$ $= g$, l'on tirera de nouveau $t\sqrt{g} =$ Arc. ſin. $(\frac{y}{Y^1})$, & $y = Y^1$ ſin. $(t\sqrt{g})$. Equation qui donne pour un tems quelconque t le rapport de l'éloignement y du point e de l'axe, à ſon plus grand éloignement Y^1, donc ſi l'on met au lieu de Y^1 la valeur de y qui convient à la courbe la plus grande AeB, & que avons trouvé plus haut Y ſin. $(x\sqrt{f})$, il en réſultera l'expreſſion générale des y pour tous les tems t, & pour chaque coupée x, ſavoir $y = Y$. ſin. $(x\sqrt{f}) \times$ ſin. $(t\sqrt{g})$; & telle eſt l'équation de la corde vibrante dans l'hypotèſe de Mr. Tailor, en ſuppoſant qu'elle ſoit en ligne droite au commencement de ſon mouvement.

Si la corde eût d'abord eu la figure d'une trochoide allongée, allors, puiſque t croiſſant, y diminueroit, on auroit trouvé $y = Y$. ſin. $(x\sqrt{f}) \times$ coſ. $(t\sqrt{g})$, ou $y = Y$ ſin. $(x\sqrt{f})$ exprimeroit la figure de la corde au commencement.

Pour déterminer la conſtante K qui entre dans les quantités f & g, on remarquera que y doit être $= 0$, ſoit qu'x ſoit $= 0$, ſoit qu'x ſoit $= a$, quelle que ſoit la valeur de t. Or en poſant $x = 0$, on a d'abord $y = 0$, parceque ſin. $0 = 0$. Qu'on faſſe donc $x = a$, & ſin. $(a\sqrt{f}) = 0$; ſi $1 : \pi$ eſt la raiſon du rayon du cercle à la circonférence, l'on ſait que ſin. $\frac{s\pi}{2} = 0$, prenant pour s un nombre quelconque entier, c'eſt pourquoi l'on aura $a\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2}$, & $\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2a}$; or $\sqrt{f} = \sqrt{\frac{S}{aPK}}$, ce qui

donne

donne $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{s\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{Sa}}$; & par conféquent $\sqrt{g} = \frac{1}{T}$ $\sqrt{\frac{2h}{K}} = \frac{s\pi}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}}$.

12. Cette folution que nous venons d'expliquer, outre qu'elle porte fur l'hypothèfe entiérement gratuite, que tous les points de la corde s'étendent en même tems en ligne droite, eft encore bien éloignée d'être générale, même dans cette hypothèfe, puifqu'il faudroit encore démontrer que c'eft dans le feul cas des forces accélératrices proportionelles aux diftances des points de la corde à l'axe, que tous fes points peuvent toucher l'axe dans le même inftant. C'eft pour fuppléer à ce défaut, que le célébre Mr. D'Alembert a imaginé une autre méthode de réfoudre le problême *de chordis vibrantibus* pris dans le fens le plus général qu'il foit poffible. Cette méthode qui eft sûrement une des plus ingénieufes, qu'on ait tiré jufqu'ici de l'Analife, fe trouve détaillée dans deux Mémoires que l'Auteur a donné dans le Tôme de l'Académie Royale de Pruffe, dont nous avons fait mention ci-devant. Je ne rapporterai ici que les Principes, fur lefquels elle eft appuyée, & les conféquences qui en réfultent pour la théorie en queftion.

L'on a vu (art.11.) que la force accélératrice du point E en e eft exprimée généralement par $-\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$, quelle que foit la courbe de la corde tendue AeB; donc puifque cette force tend à faire parcourir au point E l'efpace $eE = y$, elle devra être égale à $-\frac{T^2}{2h} \times \frac{d^2y}{dt^2}$, l'on aura donc pour l'équation générale de la courbe dans un tems quelconque t, $\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T^2}{2h} \times \frac{d^2y}{dt^2}$. Il faut d'abord remarquer dans cette équation que la différentielle d^2y du

 premier

premier membre doit être priſe en regardant l'x ſeule comme variable, au lieu que dans la différentielle d^2y du ſecond membre c'eſt le ſeul tems t qui doit varier. Les Géométres ont coutume de mettre de telles expreſſions entre deux parenthèſes de la maniére ſuivante $(\frac{d^2y}{dx^2})$, $(\frac{d^2y}{dt^2})$ afin que l'on puiſſe juger par la ſimple inſpection, laquelle des variables x, ou t doit être changeante dans la différentiation de y. Soit pour abréger $\frac{2Pah}{ST^2} = c$, & on aura à intégrer l'équation $(\frac{d^2y}{dt^2}) = c\ (\frac{d^2y}{dx^2})$. Or Mr. D'Alembert trouve par une Analiſe neuve & ingénieuſe, que l'équation finie qui répond à celle-ci eſt $y = \Psi.\ (t\surd c + x) + \Gamma.\ (t\surd c - x)$, Ψ & Γ exprimant des fonctions quelconques des quantités $t\surd c + x$, & $t\surd c - x$. Voila donc quelle ſera l'équation générale de la courbe, que peut former une corde tendue. A l'égard de la nature des fonctions exprimées par Ψ & par Γ, elles ſont en elles mêmes indéterminées; mais puiſque les deux bouts de la corde ſont ſuppoſés fixes, il eſt évident qu'elles doivent ſatisfaire à ces deux conditions, ſavoir que y ſoit $= 0$, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = a$ quel que ſoit le tems t; l'on aura par là les deux équations $\Psi\ (t\surd c) + \Gamma\ (t\surd c) = 0$, & $\Psi\ (t\surd c + a) + \Gamma\ (t\surd c - a) = 0$; il réſulte de la premiére $\Gamma = -\Psi$, & ainſi la ſeconde ſe change en $\Psi\ (t\surd c + a) - \Psi\ (t\surd c - a) = 0$, laquelle doit être vérifiée par la nature même de la fonction Ψ. Suppoſant donc une fonction quelconque Ψ qui ſoit telle, que $\Psi\ (t\surd c + a) = \Psi\ (t\surd c - a)$, quelle que ſoit la valeur de t, on aura généralement pour la corde tendue l'équation $y = \Psi\ (t\surd c + x) - \Psi\ (t\surd c - x)$. L'on ſait, que toute fonction peut être repréſentée par l'ordonnée

d'une

d'une courbe, dont l'abſciſſe ſoit la variable contenue dans la fonction propoſée ; donc ſi l'on décrit une courbe quelconque qui ait des ordonnées égales à toutes les abſciſſes exprimées par $t\sqrt{c} + a$, & $t\sqrt{c} - a$, cette courbe donnera une conſtruction fort ſimple de l'équation propoſée, car on n'aura qu'à prendre les ordonnées qui répondent aux abſciſſes $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$, dont la differènce donnera l'ordonnée de la courbe, que forme la corde ſonore dans un tems quelconque t. Or puiſque la fonction Ψ doit reſter la même, ſoit qu'on ajoute, ou qu'on retranche de la changeante $t\sqrt{c}$ la quantité a, ſi l'on ſuppoſe dans l'équation générale $y = \Psi\,(t\sqrt{c} + x) - \Psi\,(t\sqrt{c} - x)$, que le tems t ſoit augmenté de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ la valeur de y n'en ſera en rien derangée, & ainſi la corde au bout d'un tems $= \frac{a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$ reprendra toujours la figure qu'elle avoit au commencement de ce tems; c'eſt pourquoi ſi la corde dans ſes mouvemens ſe trouve une fois étendue en ligne droite, elle reviendra en cette ſituation après chaque tems t, qui contiendra un certain nombre de fois exactement le tems $T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$; l'on a donc une infinité d'autres courbes différentes de la *compagne de la trochoide allongée*, donnée par Mr. Tailor, qui toutes ſont douées de cette proprieté, que tous leurs points ſe retrouvent en même tems dans l'axe. Mr. D'Alembert a fait enſuite beaucoup de recherches ingénieuſes ſur la nature de ces courbes, qu'il nomme génératrices, & ſur la maniére, dont elles peuvent être engendrées, mais comme ces diſcuſſions n'ont pas un rapport immédiat au ſujet que nous avons en vuë, nous nous contenterons de renvoyer le Lecteur aux Mémoires cités.

 13. Mr.

13. Mr. Euler a traité depuis dans le Tôme ſuivant le même problême par une méthode analogue à celle dont nous venons de parler. Il parvient à cette équation $y = \varphi\,(x + t\sqrt{c}) + \varphi\,(x - t\sqrt{c})$, dans laquelle la fonction φ doit être telle, que $\varphi\,(t\sqrt{c}) + \varphi\,(-t\sqrt{c}) = 0$, & $\varphi\,(a + t\sqrt{c}) + \varphi\,(a - t\sqrt{c}) = 0$, quelle que ſoit la valeur de t, ce qui ne différe pas eſſentiellement de ce qu'on a trouvé ci-devant. Mr. Euler conclut de-là, que toute courbe *anguiforme* $CcAaBbD$ (Fig. 6.) continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables CcA, AaB, BbD *&c.*, ſituées alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, ſera propre à repréſenter la fonction φ, ſoit que cette courbe ſoit réguliére, ou qu'elle ſoit irréguliére. D'où il s'enſuit que, puiſque au commencement du mouvement l'équation de la courbe eſt $y = 2\,\varphi\,(x)$, il ſuffira de conſidérer la courbe initiale de la corde AaB, quelle qu'elle ſoit, & ſi on réitére ſa deſcription au deſſous, & au deſſus de l'axe de part & d'autre à l'infini, la moitié de la ſomme des ordonnés qui répondent aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, $x - t\sqrt{c}$ dans la courbe compoſée $CcAaBb$, ſera l'ordonnée à l'abſciſſe x dans la courbe de la corde tendue après un tems quelconque t.

14. Cette conſtruction de Mr. Euler eſt évidemment beaucoup plus générale que celle, que Mr. D'Alembert a imaginé, celui-ci ayant toujours ſuppoſé que la courbe génératrice fut réguliére, & qu'elle puiſſe être renfermée dans une équation continuë. C'eſt dans cette idée que ce grand Géométre a cru qu'une telle conſtruction devenoit inſuffiſante toutes les fois que dans la courbe génératrice, on n'auroit pas ſuivi la loi de continuité, & il s'eſt contenté d'en avertir le Public dans une Addition à ſes Mémoires imprimée dans le Tôme de l'année 1750.

Mr. Euler a tâché de répondre à cette objection dans le Tôme pour l'année 1753.; il reprend ici toute l'Analiſe

lise du problême, & il soutient constamment contre Mr. D'Alembert que pour l'exactitude de la construction donnée, il n'est nullement nécessaire d'avoir égard à la loi de continuité dans la fonction φ, qui dépend de la courbe initiale de la corde. Mais comme Mr. D'Alembert n'a apporté aucune raison particuliére pour appuyer son objection, Mr. Euler n'en a aussi apporté aucune, d'où il suit que la question reste encore indécise. Mr. D'Alembert promet dans sa nouvelle Edition de l'excellent Traité de Dinamique de l'Année passée un Ecrit assés étendu sur cette matiére; mais je ne sai pas s'il ait encore vu le jour; en attendant, qu'il me soit permis de faire sur cette dispute la refléxion suivante.

15. Il est certain que les Principes du calcul différentiel & intégral dépendent de la considération des fonctions variables algébriques; il ne paroit donc pas qu'on puisse donner plus d'étendue aux conclusions tirées de ces Principes que n'en comporte la nature même de ces fonctions. Or personne ne sauroit douter que dans les fonctions algébriques toutes leurs différentes valeurs ne soient liées ensemble par la loi de continuité; c'est pourquoi il semble indubitable, que les conséquences qui se déduisent par les régles du calcul différentiel & intégral, seront toujours illégitimes dans tous les cas, ou cette loi n'est pas supposée avoir lieu. Il s'ensuit de-là, que, puisque la construction de Mr. Euler est déduite immédiatement de l'intégration de l'équation différentielle donnée, cette construction n'est applicable par sa propre nature qu'aux courbes continuës, & qui peuvent être exprimées par une fonction quelconque des variables t & x. Je conclus donc que toutes les preuves qu'on peut apporter pour décider une telle question, en supposant d'abord que l'ordonnée y de la courbe, soit une fonction de t & u, comme l'ont fait jusqu'ici Mr. D'Alembert, & Mr. Euler,

sont

ſont abſolument inſuffiſantes ; & que ce n'eſt, que par un calcul tel que celui, que nous avons en vuë, dans lequel on conſidére les mouvemens des points de la corde chacun en particulier, qu'on peut eſpérer de parvenir à une concluſion qui ſoit à l'abris de toute atteinte.

16. Pendant le cours d'une telle diſpute entre deux des plus grands Géométres de notre ſiécle, il s'eſt élevé un troiſiéme Adverſaire contre tous les deux ; c'eſt le célébre Mr. Daniel Bernoulli ſi avantageuſement connu par ſes excellens Ouvrages. Celui-ci dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie Royale de Berlin de l'anne 1753. prétend avoir démontré que la ſolution de Mr. Tailor *de chordis vibrantibus* eſt ſeule capable de ſatisfaire à tous les cas poſſibles d'un tel problême, & il établit cette propoſition générale, que, quel que puiſſe être le mouvement d'une corde tendue, elle ne formera toujours que des trochoides allongées, ou bien que ſa figure ſera un mélange de deux, ou pluſieurs courbes de cette eſpèce. Or nous avons trouvé plus haut (art. 11.), que dans l'hypothèſe de Mr. Tailor l'équation de la corde vibrante eſt généralement $y = Y \text{ ſin. } (\frac{s\pi x}{2a}) \times \text{coſ. } (\frac{s\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}})$; donc poſant différentes conſtantes α, β, γ, δ *&c* pour Y, & mettant au lieu d's les nombres 1, 2, 3 *&c.* il réſulte pour l'équation générale de la corde ſelon Mr. Bernoulli.

$$\begin{aligned} y = {} & \alpha \text{ ſin. } (\frac{\pi x}{2a}) \times \text{coſ. } (\frac{\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}) \\ & + \beta \text{ ſin. } (\frac{2\pi x}{2a}) \times \text{coſ. } (\frac{2\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}) \\ & + \gamma \text{ ſin. } (\frac{3\pi x}{2a}) \times \text{coſ. } (\frac{3\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}) \\ & + \delta \text{ ſin. } (\frac{4\pi x}{2a}) \times \text{coſ. } (\frac{4\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

L'Au-

L'Auteur déduit cette ingénieuſe théorie par une eſpéce d'induction qu'il tire de la conſidération des mouvemens d'un nombre de corps qui ſont ſuppoſés former des vibrations réguliéres & iſochrones; il démontre que s'il n'y a qu'un ſeul corps, il doit ſuivre les loix connues de l'iſochroniſme, que s'il y en a deux, leurs vibrations peuvent être cenſées compoſées de deux vibrations iſochrones de la premiére eſpéce, & ainſi de ſuite; d'où il conclut que l'équation générale apportée ci-deſſus ſera propre à exprimer toutes ces eſpéces de mouvemens, en prenant autant des termes qu'il y a de corps; & que dans le cas de la corde tendue le nombre des termes doit être infini; il appuye de plus ſon ſentiment ſur l'expérience qui nous enſeigne, que d'une même corde il réſulte pluſieurs ſons armonieux, qui répondent pour ainſi dire à chaque terme de ſon équation. Enfin il étend cette théorie à tous les mouvemens réciproques infiniment petits, qui ont lieu dans la nature, & il croit pouvoir en déduire beaucoup de conſéquences importantes. Toutes ces choſes ſont expoſées en détail par l'Auteur dans la piéce citée, à laquelle nous renvoyons les Lecteurs; il me ſuffira d'en avoir donné en géneral une idée aſſes nette.

Le deſſein de Mr. Bernoulli étoit donc de faire voir que les calculs des Mrs. D'Alembert, & Euler ne nous apprenoient rien de plus, que ce qu'on pouvoit déduire de ceux de Mr. Tailor, & même que ces calculs, quoique extrémement ſimples pouvoient répandre ſur la nature des vibrations des cordes une lumiére qu'on attendroit en vain de l'Analiſe abſtraite & épineuſe de ces deux Géométres.

17. L'un d'eux, ſavoir Mr. Euler s'eſt hâté de répondre à ces objections dans la même Diſſertation citée, qui eſt imprimée à la ſuite de celles de Mr. Bernoulli. Il objecte à ſon tour à celui-ci, que ſon équation pour la

courbe

courbe ſonore, quoique continuée à l'infini, ne peut cependant exprimer tous les mouvemens poſſibles d'une corde tendue; car ſi l'on poſe $t = 0$ l'équation de la courbe devient $y = \alpha$ ſin. $\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \beta$ ſin. $\left(\frac{2\pi x}{2a}\right) + \gamma$ ſin. $\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) +$ &c. Par conſéquent il faudroit que cette équation renfermat toutes les figures qu'on peut donner à une corde tendue, ſavoir toutes les courbes poſſibles, ce qui ne paroit pas être à cauſe de certaines propriétés, qui ſemblent diſtinguer les courbes compriſes dans cette équation de toutes les autres courbes qu'on pourroit imaginer; ces propriétés ſont les mêmes que Mr. D'Alembert requiert dans ſes courbes génératrices, ſavoir qu'en augmentant, ou diminuant l'abſciſſe d'un multiple quelconque de l'axe, la valeur de l'ordonnée y ne change point. En effet l'on peut, ce me ſemble, démontrer que toutes les courbes douées de ces propriétés pourront ſe réduire à l'équation ci-deſſus. D'où il s'enſuit, que quoique Mr. D'Alembert ait trouvé l'Analiſe Tailorienne inſuffiſante pour en tirer une réſolution générale, néanmoins il paroit convenir avec Mr. Bernoulli dans le fond de la choſe, ſavoir que le problême ne ſoit réſoluble dans d'autres cas, que dans ceux de la trochoide, ou du mélange de pluſieurs trochoides.

18. On voit de-là, que les objections de Mrs. Bernoulli, & D'Alembert contre Mr. Euler, quoiqu'elles différent beaucoup les unes des autres, tiennent néanmoins aux mêmes Principes. Au reſte ni Mr. Bernoulli, ni Mr. Euler n'ont fait voir directement, ſi toutes les courbes que peut former une corde tendue ſont compriſes ou non dans l'équation rapportée; car, puiſque dans cette équation chaque terme répond, pour ainſi dire, aux mouvemens de chaque point de la corde, il eut fallu pour cela

donner

donner d'abord une ſolution générale du problême de la corde vibrante dans l'hypothéſe qu'elle fut chargée d'un nombre indéfini de corps; ſolution que Mr. Bernoulli même avoue n'avoir jamais vu, & qu'il croit de plus que perſonne n'ait jamais donnée.

Il réſulte de tout cet expoſé que l'Analiſe que nous avons propoſée dans le chapitre précédent eſt, peut être, la ſeule qui puiſſe jetter ſur ces matiéres obſcures une lumiére ſuffiſante à éclaircir les doutes qu'on doit former de part, & d'autre. Je vais donc entreprendre cette Analiſe, & je tâcherai de la développer dans toute ſon étendue, non ſeulement parcequ'elle doit ſatisfaire à tous les objets que nous avons ici en vue; mais encore parce qu'elle eſt, ce me ſemble, entiérement neuve, puiſque il s'agit de déterminer les mouvemens de tant de corps qu'on en voudra ſuppoſer ſans concevoir d'abord qu'il y ait entr'eux aucune loi de continuité, par laquelle ils ſoient liés, pour ainſi dire, & contenus dans une même formule.

CHAPITRE III.

Solution du Problême général proposé dans les chapitres précédens.

19. SOit pour abréger $\frac{2Eh}{MT^2r} = e$, on aura par l'article 8. les équations suivantes,

$$\frac{d^2y^{I}}{dt^2} = e\,(y^{II} - 2y^{I})$$

$$\frac{d^2y^{II}}{dt^2} = e\,(y^{III} - 2y^{II} + y^{I})$$

$$\frac{d^2y^{III}}{dt^2} = e\,(y^{IV} - 2y^{III} + y^{II})$$

$$\frac{d^2y^{IV}}{dt^2} = e\,(y^{V} - 2y^{IV} + y^{III})$$

&c.

$$\frac{d^2y^{m-1}}{dt^2} = e\,(-2y^{m-1} + y^{m-2}).$$

Pour intégrer toutes ces équations, on n'a qu'à recourir à la méthode, que Mr. D'Alembert nous a donné dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin. On supposera d'abord selon cette méthode $dy^{I} = u^{I}dt$, $dy^{II} = u^{II}dt$, $dy^{III} = u^{III}dt$, $dy^{IV} = u^{IV}dt$ *&c.* $dy^{m-1} = u^{m-1}dt$; ce qui changera les équations différentielles du second ordre dans les suivantes du premier

$$du^{I} = e\,(y^{II} - 2y^{I})\,dt$$

$$du^{II} = e\,(y^{III} - 2y^{II} + y^{I})\,dt$$

$$du^{III} = e\,(y^{IV} - 2y^{III} + y^{II})\,dt$$

$$du^{IV} = e\,(y^{V} - 2y^{IV} + y^{III})\,dt$$

&c.

$$du^{m-1} = e\,(-2y^{m-1} + y^{m-2})\,dt.$$

Il eſt à remarquer que les quantités u^{I}, u^{II}, u^{III} &c. expriment les viteſſes des corps qui parcourent les eſpaces y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. & qu'ainſi il eſt encore important de déterminer leurs valeurs.

Préſentement il faut multiplier toutes ces équations, moins une à volonté, par des coéficiens indéterminés, & les ajouter enſuite dans une même ſomme. Soient M^{I}, M^{II}, M^{III} &c. les coéficiens qui doivent multiplier les derniéres équations, & N^{I}, N^{II}, N^{III} &c. ceux qui multiplient les autres; & on aura $M^{I}\,du^{I} + N^{I}\,dy^{I} + M^{II}\,du^{II} + N^{II}\,dy^{II} + M^{III}\,du^{III} + N^{III}\,dy^{III} + \&c. + M^{m-1}\,du^{m-1} + N^{m-1}\,dy^{m-1} = (N^{I}u^{I} + e[M^{II} - 2M^{I}]y^{I})\,dt + (N^{II}u^{II} + e[M^{III} - 2M^{II} + M^{I}]y^{II})\,dt + (N^{III}u^{III} + e[M^{IV} - 2M^{III} + M^{II}]y^{III})\,dt + \&c. + (N^{m-1}u^{m-1} + e[-2M^{m-1} + M^{m-2}]y^{m-1})\,dt$, où l'on ſuppoſera pour plus de facilité le premier coéficient $M^{I} = 1$.

Soit fait enſorte que le premier membre de cette équation devienne un multiple exact de la différentielle du ſecond; & ſuppoſant R un coéficient conſtant quelconque on trouvera par la comparaiſon des termes $RM^{I} = N^{I}$; $RM^{II} = N^{II}$; $RM^{III} = N^{III}$ &c. $RM^{m-1} = N^{m-1}$; enſuite $RN^{I} = e\,(M^{II} - 2M^{I})$; $RN^{II} = e\,(M^{III} - 2M^{II} + M^{I})$; $RN^{III} = e\,(M^{IV} - 2M^{III} + M^{II})$ &c. $RN^{m-1} = e\,(-2M^{m-1} + M^{m-2})$; en ſubſtituant dans ces derniéres équations les valeurs des N tirées des premiéres, il en réſultera

$$R^2 M^{I} = e\,(M^{II} - 2M^{I})$$
$$R^2 M^{II} = e\,(M^{III} - 2M^{II} + M^{I})$$
$$R^2 M^{III} = e\,(M^{IV} - 2M^{III} + M^{II})$$
$$\&c.$$
$$R^2 M^{m-1} = e\,(-2M^{m-1} + M^{m-2}).$$

Soit poſé $\frac{R^2}{e} + 2 = K$, & en ordonnant les termes on parviendra aux équations

$$M^{II} = K M^{I}$$
$$M^{III} = K M^{II} - M^{I}$$
$$M^{IV} = K M^{III} - M^{II}$$
&c.

d'où l'on doit tirer les valeurs d'M.

Pour y parvenir, je confidère que ces équations étant toutes femblables, on peut les exprimer généralement par $M^{\mu} = K M^{\mu-1} - M^{\mu-2}$, pofant pour μ tous les nombres entiers pofitifs depuis o jufqu'à $m - 1$, laquelle équation contient évidemment une fuite récurrente, dont l'échelle de rélation eft $K - 1$. On aura donc pour la valeur de M^{μ} l'expreffion $A a^{\mu} + B b^{\mu}$, où A, & B font des conftantes, & a & b expriment les racines de l'équation du fecond dégré $z^2 - K z + 1 = 0$. De cette équation l'on tire $z = \frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$, ce qui donne $a = \frac{K}{2} + \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$, $b = \frac{K}{2} - \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$. Pour déterminer les conftantes A & B, on fera la comparaifon des deux premiers termes, favoir M^{0}, & M^{I}; or M^{0} eft évidemment égal à zero, puifque l'équation qu'il devroit multiplier ne fe trouve pas; & $M^{I} = 1$ par fuppofition; l'on aura donc $A + B = 0$; & $A a + B b = 1$, d'où l'on déduit $B = - A$; $A(a - b) = 1$; $A = \frac{1}{a - b}$; & $B = - \frac{1}{a - b}$; ces valeurs étant fubftituées, il en réfultera $M^{\mu} = \frac{a^{\mu} - b^{\mu}}{a - b}$.

Nous avons fuppofé que le nombre des équations fut $= m - 1$ (art. 8.); il faut donc que le coéficient qui auroit multiplié l'équation fuivante, foit de foi même égal à zero; favoir, il faut que $M^{m} = 0$, ou bien que

que $\frac{a^m - b^m}{a - b} = 0$. Voila l'équation qui nous donnera la valeur de la quantité R qui étoit encore inconnuë.

20. Pour résoudre cette équation j'ai recours au fameux théorème de Mr. Cotes, par lequel on trouve $a^m - b^m = (a - b) \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{2\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{3\pi}{m} + b^2) \times$ &c., en prenant un nombre de facteurs égal à m, de sorte que le dernier devienne $\surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2)$, où π dénote la circonférence du cercle, dont le rayon est 1. L'on a donc dans notre cas $\surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{2\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{3\pi}{m}) \times$ &c. $\times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2) = 0$, ce qui donne autant d'équations particulières, qu'il y a de facteurs, savoir en dégageant ces expressions des radicaux,

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{2\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{3\pi}{m} + b^2 = 0$$

&c.

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2 = 0.$$

Soit ν un nombre quelconque entier depuis 0 jusqu'à $m - 1$, & toutes ces équations se réduiront à celle-ci

$a^2 -$

$a^2 - 2ab$ cof. $\frac{\nu\pi}{m} + b^2 = 0$; fi l'on fubftitue les valeurs trouvées de a & b (art. 19.), elle fe change en $K^2 - 2 - 2$ cof. $\frac{\nu\pi}{m} = 0$, d'où l'on tire $K^2 = 2$ ($1 +$ cof. $\frac{\nu\pi}{m}$), ce qui fe réduit par les théorèmes de la multiplication des angles à $K^2 = 4$ cof. $(\frac{\nu\pi}{2m})^2$, d'où l'on a enfin $K = \pm 2$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m}$.

21. Je remarque d'abord, que la variété des fignes dans cette expreffion de K eft inutile, parceque en faifant ν plus grand de $\frac{m}{2}$ la formule nous redonne les mêmes valeurs, que quand ν étoit plus petit, mais avec des fignes contraires; l'on aura donc fimplement $K = 2$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m}$, pofant pour ν tous les nombres entiers pofitifs, depuis 0 jufqu'à $m - 1$. Par cette valeur générale de K, on trouvera celle de R par le moyen de l'équation $\frac{R^2}{e} + 2 = K$ (art. 18.); car on aura $R^2 = 2e$ (cof. $\frac{\nu\pi}{2m} - 1$) $= -4e$ (fin. $\frac{\nu\pi}{4m})^2$ par les théorèmes cités, d'où il réfulte $R = \pm 2\sqrt{e} \times$ fin. $\frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$. On déduira encore de la valeur de K, celles des quantités a & b, comme il fuit, $a =$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m} + \sqrt{([\text{cof. } \frac{\nu\pi}{2m}]^2 - 1)}$, $b =$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m} - \sqrt{([\text{ cof. } \frac{\nu\pi}{2m}]^2 - 1)}$, favoir

$a =$

$a = \text{cof.} \frac{\nu\pi}{2m} + \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, $b = \text{cof.} \frac{\nu\pi}{2m} - \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, d' où l' on tire en ſubſtituant

$$M^{\mu} = (\text{cof.} \frac{\nu\pi}{2m} + \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1})^{\mu} : 2\, \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$$

$$- (\text{cof.} \frac{\nu\pi}{2m} - \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1})^{\mu} : 2\, \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$$

laquelle expreſſion ſe réduit encore, par les mêmes théorêmes ci-deſſus, à $M^{\mu} = \text{fin.} \frac{\mu \times \nu\pi}{2m} : \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m}$.

22. Toutes ces opérations achevées, retournons à préſent ſur nos pas pour procéder à l' intégration de l' équation différentielle (art. 19.). Soit pour abréger $M^{I} u^{I} + M^{II} u^{II} + M^{III} u^{III} + \&c.; + M^{m-1} u^{m-1} + R (M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) = z$, elle deviendra par ce moyen $dz = Rz\,dt$, dont l'intégrale ſe trouve $z = F c^{Rt}$, où c eſt le nombre, dont le logarithme hyperbolique eſt 1, & F dénote une conſtante quelconque égale à valeur de z, qui répond au cas de $t = 0$; l'on aura, donc en reſtituant au lieu de z ſa valeur premiére, $M^{I} u^{I} + M^{II} u^{II} + M^{III} u^{III} + \&c. + M^{m-1} u^{m-1}; + R (M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) = F c^{Rt}$, & puiſque $u^{I} dt = dy^{I}$; $u^{II} dt = dy^{II}$; $u^{III} dt = dy^{III}$; &c. ſi l' on multiplie toute l'équation par dt, il en réſultera $M^{I} dy^{I} + M^{II} dy^{II} + M^{III} dy^{III} + \&c. + M^{m-1} dy^{m-1} + R (M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) dt = F c^{Rt} dt$, & multipliant encore par c^{Rt}, & intégrant de nouveau $(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) c^{Rt} = \frac{F c^{2Rt}}{2R} + G$.

Pour déterminer les conſtantes F & G ſoient V^{I}, V^{II}, V^{III} &c., V^{m-1}, & Y^{I}, Y^{II}, Y^{III} &c., Y^{m-1}, les valeurs de u^{I},

u^{II},

u^{II}, u^{III} &c., u^{m-I}, & de y^{I}, y^{II}, y^{III} &c., y^{m-I} au commencement du mouvement, lorſque $t = 0$; ſuppoſons de plus pour abréger
$M^{I} Y^{I} + M^{II} Y^{II} + M^{III} Y^{III} + \&c. + M^{m-I} Y^{m-I} = P.$
$M^{I} V^{I} + M^{II} V^{II} + M^{III} V^{III} + \&c. + M^{m-I} V^{m-I} = Q,$
l'on aura d'abord $F = Q + RP$, enſuite poſant $t = 0$ dans la derniére équation, $P = \frac{F}{2R} + G$, d'où l'on tire $G = \frac{2PR - F}{2R} = \frac{2PR - Q - PR}{2R} = \frac{PR - Q}{2R}$; donc en diviſant l'équation par c^{Rt} on trouvera finalement $M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-I} y^{m-I} = \frac{RP + Q}{2R} \times c^{Rt} + \frac{RP - Q}{2R} \times c^{-Rt} = P \times \frac{c^{Rt} + c^{-Rt}}{2} + \frac{Q}{R} \times \frac{c^{Rt} - c^{-Rt}}{2}$, ce qui à cauſe de $R = \pm 2\sqrt{e} \times \text{ſin.} \frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$ ſe reduit à
$$M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-I} y^{m-I} = P \times \text{coſ.} \left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.} \frac{\nu\pi}{4m}\right) + \frac{Q \times \text{ſin.} \left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.} \frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.} \frac{\nu\pi}{4m}}$$
ſoit qu'on prenne dans R le ſigne $+$, ou le ſigne $-$, comme nous l'enſeignent les expreſſions exponentielles imaginaires des ſinus & coſinus, ſi familiéres aujourd'hui aux Géométres.

23. Cette équation toute ſimple qu'elle eſt ſuffit néanmoins pour déterminer les valeurs des inconnues y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. qui ſont au nombre de $m - 1$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à refléchir qu'elle contient le nombre indéterminé ν, qui peut avoir les valeurs 1, 2, 3 &c. juſqu'à $m - 1$, d'où il réſultera autant d'équations. Tout ſe réduit donc à déterminer par le moyen de toutes ces équa-

équations, les valeurs de chaque inconnuë qu'elles contiennent, c'eſt ce que nous allons entreprendre.

Je commence par mettre au lieu des quantités M leurs valeurs trouvées (art. 21.), & effaçant le dénominateur commun ſin. $\frac{\nu\pi}{2m}$ qui s'évanouit naturellement de l'équation, je poſe pour plus de commodité.

$$P^{\nu} = Y^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + Y^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\nu\pi}{2m} + Y^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + Y^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{2m}.$$

$$Q^{\nu} = V^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + V^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\nu\pi}{2m} + V^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + V^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{2m}.$$

Où les expoſans de P, & Q dénoteront ſimplement les valeurs particuliéres de ν, qui leur appartiennent. Ainſi l'équation générale ci-deſſus, deviendra

$$y^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + y^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\nu\pi}{2m} + y^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + y^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\frac{\nu\pi}{2m} = P^{\nu} \times \text{coſ.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right) + \frac{Q^{\nu} \times \text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}}$$

Soit encore pour abréger $P^{\nu} \times \text{coſ.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right)$

$$+ \frac{Q^{\nu} \times \text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}} = S^{\nu}$$

& poſant ſucceſſivement à la place de ν tous les nombres naurels depuis o, juſqu'à $m-1$, on aura les équations ſuivantes

$$y^{\text{I}} \text{ fin. } \frac{\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ fin. } \frac{2\pi}{2m} + y^{\text{III}} \text{ fin. } \frac{3\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ fin. } (m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\text{I}}$$

$$y^{\text{I}} \text{ fin. } \frac{2\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ fin. } \frac{4\pi}{2m} + y^{\text{III}} \text{ fin. } \frac{6\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ fin. } 2\,(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\text{II}}$$

$$y^{\text{I}} \text{ fin. } \frac{3\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ fin. } \frac{6\pi}{2m} + y^{\text{III}} \text{ fin. } \frac{9\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ fin. } 3\,(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\text{III}}$$

&c.

$$y^{\text{I}} \text{ fin. } (m-1) \frac{\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ fin. } 2\,(m-1) \frac{\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ fin. } (m-1)^2 \frac{\pi}{2m} = S^{m-1}$$

dont le nombre ſera $m - 1$.

Il faudroit à préſent, ſelon les règles ordinaires ſubſtituer les valeurs des inconnues y^{I}, y^{II}, y^{III} *&c.* d'une équation dans les autres ſucceſſivement, pour arriver à une, qui ne contienne plus qu'une ſeule de ces variables; mais il eſt facile de voir, qu'en s'y prenant de cette façon on tomberoit dans des calculs impraticables à cauſe du nombre indéterminé d'équations & d'inconnues, il eſt donc néceſſaire de ſuivre une autre route; voici celle qui m'a paru la plus propre.

24. Je multiplie d'abord chacune de ces équations par un des coéficiens indéterminés D^{I}, D^{II}, D^{III}, D^{IV} *&c.*, en ſuppoſant que le premier D^{I} ſoit $= 1$; enſuite je les ajoute toutes enſemble, j'ai

$$y^{\text{I}} \left(D^{\text{I}} \text{ fin. } \frac{\pi}{2m} + D^{\text{II}} \text{ fin. } \frac{2\pi}{2m} + D^{\text{III}} \text{ fin. } \frac{3\pi}{2m} + \&c \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \text{ fin. } [m-1] \frac{\pi}{2m} \right) \qquad + y^{\text{II}}$$

$$+ y^{II} \left(D^{I} \text{ſin.} \frac{2\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{4\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{6\pi}{2m} + \&c. \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \text{ſin.}\ 2 [m-1] \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$+ y^{III} \left(D^{I} \text{ſin.} \frac{3\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{6\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{9\pi}{2m} + \&c \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \text{ſin.}\ 3 [m-1] \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$+ \&c.$$

$$+ y^{m-1} \left(D^{I} \text{ſin.} [m-1] \frac{\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.}\ 2 [m-1] \frac{\pi}{2m} \right.$$

$$\left. + \&c. + D^{m-1} \text{ſin.} [m-1]^2 \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$= D^{I} S^{I} + D^{II} S^{II} + D^{III} S^{III} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.$$

Qu'on veuille à préſent la valeur d'un y quelconque, par exemple de y^{μ}, l'on fera évanouir les coéficiens des autres y, & l'on obtiendra l'équation ſimple.

$$y^{\mu} \left(D^{I} \text{ſin.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{2\mu\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{3\mu\pi}{2m} \right.$$

$$\left. + \&c. + D^{m-1} [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \right)$$

$$= D^{I} S^{I} + D^{II} S^{II} + D^{III} S^{III} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.$$

L'on déterminera enſuite les valeurs des quantités D^{II}, D^{III}, D^{IV} &c., qui ſont en nombre de $m-2$ par les équations particuliéres qu'on aura en ſuppoſant égaux à zero les coéficiens de tous les autres y; l'on aura par là l'équation générale.

$$D^{I} \text{ſin.} \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{2\lambda\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ D^{m-1} \text{ſin.} [m-1] \frac{\lambda\pi}{2m} = 0,$$ laquelle devra être vraie quelque nombre poſitif entier qu'on poſe au lieu de λ depuis 0, juſqu'à $m-1$, excepté μ.

25. Pour

25. Pour tirer de cette équation les valeurs des quantités D, je remarque d'abord, que tout ſinus d'un angle multiple ſe reduit à une ſuite de puiſſances entiéres, & poſitives du coſinus de l'angle ſimple, dont le plus grand expoſant eſt égal au nombre qui en dénote le multiple diminué de l'unité, toute la ſuite étant encore multipliée par le ſinus de l'angle ſimple. Donc ſi l'on développe de cette façon tous les ſinus des angles multiples de $\frac{\lambda\pi}{2m}$ & qu'on diviſe enſuite l'équation par ſin. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, on parviendra à une autre équation, qui ne contiendra que des puiſſances de coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, & dont le dégré ſera $= m - 2$; de-là il ſuit qu'en regardant coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, comme l'inconnue de cette équation, ſes racines devront être coſ. $\frac{\pi}{2m}$, coſ. $\frac{2\pi}{2m}$, coſ. $\frac{3\pi}{2m}$ &c. juſqu'à coſ. $(m-1)\frac{\pi}{2m}$, excepté coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$. Par conſéquent toute l'équation ne pourra être que le produit continuel des facteurs coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{\pi}{2m}$; coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{2\pi}{2m}$; coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{3\pi}{2m}$, &c. dont le dernier ſera coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $(m-1)\frac{\pi}{2m}$, en omettant toute fois le facteur intermédiaire coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$; c'eſt pourquoi ſi l'on nomme L une conſtante quelconque, l'on aura

D^1 ſin.

$$\frac{D^{\text{I}} \text{ſin. } \frac{\lambda \pi}{2m} + D^{\text{II}} \text{ſin. } \frac{2\lambda\pi}{2m} + \&c. + D^{m-1} \text{ſin. } (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{2m}}$$

$$= L\,(\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ. } \frac{\pi}{2m})\,(\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ. } \frac{2\pi}{2m})$$

$$(\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ. } \frac{3\pi}{2m}) \ldots (\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ. } [m-1]\frac{\pi}{2m})$$

Le théorème déja cité de Mr. Cotes nous donne l' équation

$$p^{2m} - q^{2m} = (p^2 - q^2)\,(p^2 - 2pq \text{ coſ. } \frac{\pi}{2m} + q^2)$$

$$(p^2 - 2pq \text{ coſ. } \frac{2\pi}{2m} + q^2)\,(p^2 - 2pq \text{ coſ. } \frac{3\pi}{2m} + q^2)$$

$\ldots\ldots (p^2 - 2pq \text{ coſ. } [m-1]\frac{\pi}{2m} + q^2)$, en n' omettant aucun des facteurs intermédiaires ; que l' on compare donc ces facteurs avec ceux de l' équation précédente, en faiſant $p^2 + q^2 = \text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m}$, & $2pq = 1$, & l' on aura

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 + \text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} = 2\,(\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{4m})^2$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = \text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - 1 = -2\,(\text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{4m})^2,$$

d' où en extrayant les racines, il réſulte $p + q = \pm \sqrt{2} \times \text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m}$, $p - q \pm \sqrt{2} \times \text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, & enfin

$$p = \pm \frac{\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$q = \pm \frac{\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

Par

Par conſéquent l' on aura

$$p^2 = \frac{1}{2}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-}\right)^2$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$q^2 = \frac{1}{2}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^2$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}.$$

$p^2 - q^2 = \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$; de même

$$p^{2m} = \frac{1}{2^m}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$q^{2m} = \frac{1}{2^m}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$p^{2m} - q^{2m} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^{m-1}}$$

Toutes ces valeurs étant ainſi trouvées, l' on diviſera $p^{2m} - q^{2m}$ par $(p^2 - q^2)(p^2 - 2pq\ \text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + q^2)$ ce qui donne $\dfrac{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{2^{m-1}\ \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}\right)}$ laquelle expreſſion multipliée par L devra être égale au premier membre

membre de l'équation trouvée dans cet article; dont en ôtant de part & d'autre le diviſeur commun ſin. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ on trouvera

$$D^{\text{I}} \text{ ſin.} \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{\text{II}} \text{ ſin.} \frac{2\lambda\pi}{2m} + D^{\text{III}} \text{ ſin.} \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ D^{m-1} \text{ ſin.} (m-1) \frac{\lambda\pi}{2m} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\text{ſin.} \frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.} \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.} \frac{\mu\pi}{2m}}$$

équation qui doit être identique.

Si donc l'on multiplie toute l'équation par coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$, & qu'après avoir réduit les produits des ſinus par les coſinus en ſimples ſinus, on faſſe la comparaiſon des termes, on trouvera les valeurs cherchées des quantités indéterminées D. Pour faire cette opération plus aiſément commençons par multiplier la ſuite qui forme le premier membre de l'équation rapportée par 2 coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$; en développant chaque produit particulier, & en ordonnant les termes, il viendra

$$D^{\text{II}} \text{ ſin.} \frac{\lambda\pi}{2m} + (D^{\text{III}} + D^{\text{I}}) \text{ ſin.} \frac{2\lambda\pi}{2m} + (D^{\text{IV}} + D^{\text{II}}) \text{ ſin.} \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + D^{m-2} \text{ ſin.} (m-1) \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{m-1} \text{ ſin.} \frac{\lambda\pi}{2}.$$

Enſuite ſi l'on multiplie la même ſerie par 2 coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$, & qu'on retranche ce dernier produit de l'autre, on parviendra à l'équation

(D^{II}

$$(D^{II} - 2D^{I} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m}) \text{ fin.} \frac{\lambda\pi}{2m} + (D^{III} - 2D^{II} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m}$$
$$+ D^{I}) \text{ fin.} \frac{2\lambda\pi}{2m} + (D^{IV} - 2D^{III} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m}$$
$$+ D^{II}) \text{ fin.} \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + (-2D^{m-1} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m}$$
$$+ D^{m-2}) \text{ fin.} [m-1] \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{m-1} \text{ fin.} \frac{\lambda\pi}{2}$$
$$= \frac{L}{2^{m-2}} \times \text{fin.} \frac{\lambda\pi}{2}.$$

L' on aura donc

$$D^{II} - 2D^{I} \text{ cof.} \frac{\mu\pi}{2m} = 0$$
$$D^{III} - 2D^{II} \text{ cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{I} = 0$$
$$D^{IV} - 2D^{III} \text{ cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{II} = 0$$

&c.

$$-2D^{m-1} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{m-2} = 0$$
$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

d'où l' on doit tirer les valeurs des quantités D.

Il eſt viſible au premier aſpect, que les quantités D conſtituent une progreſſion recurrente, dans laquelle en commençant par le bas, il eſt

$$D^{m} = 0$$
$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$
$$D^{m-2} = 2D^{m-1} \text{ cof.} \frac{\mu\pi}{2m} - D^{m}$$
$$D^{m-3} = 2D^{m-2} \text{ cof.} \frac{\mu\pi}{2m} - D^{m-1}$$

&c.

Le

Le terme général de cette ſuite ſe trouvera comme ci-deſſus (art. 19.) exprimé de cette façon $D^{m-n} = Aa^n + Bb^n$, où a & b ſont les racines de l'équation du ſecond dégré $z^2 - 2z \text{ coſ. } \frac{\mu\pi}{2m} + 1 = 0$. Pour déterminer les conſtantes A & B qu'on poſe $n = 0$, & $= 1$, l'on aura $A + B = 0$, & $Aa + Bb = \frac{L}{2^{m-2}}$, ce qui donne $B = -A$, $A = \frac{L}{2^{m-2}(a-b)}$, $B = -\frac{L}{2^{m-2}(a-b)}$, & par conſéquent $D^{m-n} = \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{a^n - b^n}{a - b}$. Or ſi l'on ſubſtitue au lieu de a & b les racines de l'équation propoſée, il en réſultera par un procédé ſemblable à celui de l'article 25. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{\text{ſin. } \frac{n\mu\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m}}$, d'où D^{m-n}

$= \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{n\mu\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m}}$; & poſant pour plus de comodité

$m - n = s$, $D^s = \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\text{ſin. } (m-s)\frac{\mu\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m}}$; mais

$\text{ſin. } (m-s)\frac{\mu\pi}{2m} = \text{ſin. } \left(\frac{\mu\pi}{2} - \frac{s\mu\pi}{2m}\right) = \pm \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m}$; où le ſigne + doit être pris toutes les fois que μ eſt un nombre impair, & le ſigne − quand μ eſt pair; on aura

donc enfin $D^s = \pm \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m}}$, & telle eſt la

 valeur

valeur générale de D, d'où dépend la résolution des équations de l'article 23.

26. Reprenons maintenant l'équation de l'article 24., & substituant dans son second membre les valeurs trouvées des quantités D, on la réduira d'abord à

$$y^{\mu} \left(D^{I} \text{ſin.} \frac{\mu \pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{2 \mu \pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{3 \mu \pi}{2m} + \&c \right.$$
$$\left. + D^{m-1} \text{ſin.} [m-1] \frac{\mu \pi}{2m} \right) = \pm \frac{L}{2^{m-2} \text{ſin.} \frac{\mu \pi}{2m}}$$
$$\left(S^{I} \text{ſin.} \frac{\mu \pi}{2m} + S^{II} \text{ſin.} \frac{2 \mu \pi}{2m} + S^{III} \text{ſin.} \frac{3 \mu \pi}{2m} + \&c. \right.$$
$$\left. + S^{m-1} \text{ſin.} [m-1] \frac{\mu \pi}{2m} \right).$$

A l'égard du premier membre, on remarquera que D^{I} ſin. $\frac{\lambda \pi}{2m}$ + D^{II} ſin. $\frac{2 \lambda \pi}{2m}$ + D^{III} ſin. $\frac{3 \lambda \pi}{2m}$ + &c. + D^{m-1} ſin. $(m-1) \frac{\lambda \pi}{2m}$

$$= \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\text{ſin.} \frac{\lambda \pi}{2}}{\text{coſ.} \frac{\lambda \pi}{2m} - \text{coſ.} \frac{\mu \pi}{2m}} \text{ (art. 25.)}$$

Donc ſi l'on ſuppoſe $\lambda = \mu$ l'on aura D^{I} ſin. $\frac{\mu \pi}{2m}$ + D^{II} ſin. $\frac{2 \mu \pi}{2m}$ + D^{III} ſin. $\frac{3 \mu \pi}{2m}$ + &c. + D^{m-1}

$$\text{ſin.} (m-1) \frac{\mu \pi}{2m} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\text{ſin.} \frac{\mu \pi}{2}}{\text{coſ.} \frac{\mu \pi}{2m} - \text{coſ.} \frac{\mu \pi}{2m}};$$

mais puiſque μ eſt un nombre entier, on a ſin. $\frac{\mu \pi}{2} = 0$, donc le dernier membre de l'équation ſe réduit à

$\frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur ſoit ſuppoſé λ variable, & différentiant à part le numérateur, & le dénominateur de la formule générale

$$\frac{\text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\ \frac{\mu\pi}{2m}}$$ on trouvera $$\frac{m\ \text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2}}{-\ \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m}},$$ or μ

étant un nombre entier, coſ. $\frac{\mu\pi}{2}$ eſt $= \pm 1$, le ſigne ſupérieur répond à μ pair, l'inférieur à μ impair; l'on aura donc D^{I} ſin. $\frac{\mu\pi}{2m} + D^{II}$ ſin. $\frac{2\mu\pi}{2m} + D^{III}$ ſin. $\frac{3\mu\pi}{2m}$ $+$ &c. $+ D^{m-1}$ ſin. $(m-1)\frac{\mu\pi}{2m} = \pm \frac{L}{2^{m-1}}$

$\times \frac{m}{\text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m}}$, & ainſi l'équation précédente deviendra

$$\pm\, y^{\mu} \times \frac{mL}{2^{m-1}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m}} = \pm \frac{L}{2^{m-2}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m}} \Big(S^{I}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} + S^{II}\ \text{ſin.}\ \frac{2\mu\pi}{2m} + S^{III}\ \text{ſin.}\ \frac{3\mu\pi}{2m} + \text{\&c.} + S^{m-1}\ \text{ſin.}\ [m-1]\ \frac{\mu\pi}{2m}\Big),$$ d'où l'on tire

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times \Big(S^{I}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} + S^{II}\ \text{ſin.}\ \frac{2\mu\pi}{2m} + S^{III}\ \text{ſin.}\ \frac{3\mu\pi}{2m} + \text{\&c.} + S^{m-1}\ \text{ſin.}\ [m-1]\ \frac{\mu\pi}{2m}\Big).$$

Voila donc quelle doit être l'expreſſion générale des y qui dénotent les eſpaces parcourus par chacun des corps dans un tems quelconque t.

27. Pour connoître plus clairement la nature de l'équation trouvée, on y ſubſtituera les valeurs des quantités

 S^{I},

S^{I}, S^{II}, S^{III} de l'art. 23. ce qui donnera finalement la formule

$$
\begin{aligned}
y^{\mu} = {} & \frac{2}{m} \times P^{I} \text{ fin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{\pi}{4m}\right) \\
& + \frac{2}{m} \times P^{II} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{2\pi}{4m}\right) \\
& + \frac{2}{m} \times P^{III} \text{ fin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{3\pi}{4m}\right) \\
& + \&c. \\
& + \frac{2}{m} P^{m-1} \text{ fin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}\right) \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{I} \text{ fin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } \frac{\pi}{4m}} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{II} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{2\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } \frac{2\pi}{4m}} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{III} \text{ fin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{3\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } \frac{3\pi}{4m}} \\
& + \&c. \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{m-1} \text{ fin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}}
\end{aligned}
$$

les quantités P^{I}, P^{II}, P^{III} &c. & Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} dépendent de la premiére fituation des corps, & de leurs premiéres viteffes, felon les fuppofitions de l'article 22.

De cette expreſſion de y^μ on tirera aiſément celle de u^μ qui exprime la viteſſe, avec laquelle l'eſpace y^μ eſt parcouru; car puiſque $u^\mu = \frac{d y^\mu}{dt}$, on n'aura qu'à différentier l'équation donnée en faiſant t variable; & on trouvera l'expreſſion ſuivante.

$$u^\mu = -\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{\text{I}} \text{ ſin. } \frac{\pi}{4m} \times \text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{\pi}{4m})$$

$$-\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{\text{II}} \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4m} \times \text{ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{2\pi}{4m})$$

$$-\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{\text{III}} \text{ ſin. } \frac{3\pi}{4m} \times \text{ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{3\pi}{4m})$$

$$-\ \&c.$$

$$-\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{m-1} \text{ ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m} \times \text{ſin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times$$

$$\text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m})$$

$$+\frac{2}{m} \times Q^{\text{I}} \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{\pi}{4m})$$

$$+\frac{2}{m} \times Q^{\text{II}} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{2\pi}{4m})$$

$$+\frac{2}{m} \times Q^{\text{III}} \text{ ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{3\pi}{4m})$$

$$+\ \&c.$$

$$+\frac{2}{m} \times Q^{m-1} \text{ ſin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times$$

$$\text{ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}).$$

CHA-

CHAPITRE IV.

Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt fini.

28. NOUS regarderons les quantités y, comme des ordonnées à l'axe AB (Fig. 7.), qui eſt ſuppoſé diviſé en un nombre m de parties égales à r; & les expoſans de ces variables exprimeront le quantiéme de la place qu'elles occupent ſur l'axe, en comptant depuis l'extrémité A. Ainſi le poligone qu'on pourra faire paſſer par les extrémités de toutes ces ordonnées ſera la figure de la corde tendue, & chargée à chaque angle d'un poid M, & il ſera en même tems le lieu géométrique des excurſions des corps élaſtiques M, diſpoſés dans la même ligne droite AB, ſelon ce qu'on a démontré dans les chapitres précédens.

Il eſt d'abord évident que la formule qui donne la valeur de y^{μ} eſt compoſée d'une ſuite de formules telles que

$$A \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{s\pi}{4m}\right) + \frac{B \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{s\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{4m}}$$

que je dénoterai dorénavant par φ^{μ}; A & B ſont des conſtantes qui dépandent du premier état du ſiſtème des corps, & s exprime un nombre quelconque dans la ſuite naturelle 1, 2, 3, ... $m - 1$; ainſi ſi l'on conſtruit un nombre $m - 1$ de poligones qui répondent tous à cette expreſſion générale en y ſuppoſant s ſucceſſivément égal à 1, 2, 3, &c. juſqu'à $m - 1$, & qu'on prenne

prenne le premier pour axe du second, le second pour axe du troisiéme, & ainsi de suite, le dernier qui sera formé sur tous les autres contiendra les vraies valeurs de toutes les variables y; d'où l'on voit que les mouvemens rectilignes des corps qui parcourent les espaces y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. pourront être censés composés d'autant de mouvemens particuliers qu'il y a de corps mobiles.

Examinons de plus près la composition de ces mouvemens.

29. Soit posé $\varphi^{\mu} = 0$, l'on aura les deux équations $\text{sin.}\ \frac{s\mu\pi}{2m} = 0$, & $A\ \text{cos.}\ (2t\sqrt{e} \times \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}) +$

$$\frac{B\ \text{sin.}\ (2t\sqrt{e} \times \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m})}{\text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}} = 0,$$ qui détermineront les points, où chacun des poligones simples pourra couper son propre axe. Il est visible que la premiére aura lieu toutes les fois que $\frac{s\mu}{m}$ sera égal à zero, ou à un nombre entier quelconque; soit donc k un tel nombre, on aura $\frac{s\mu}{m} = k$, & $\mu = \frac{km}{s}$, laquelle valeur de μ satisfera toujours quel que soit le tems t.

Soit $s = 1$, l'on aura $\mu = km, = 0, = m, = 2m$, &c. d'où il s'ensuit que le poligone ne pourra rencontrer l'axe AB que dans ses deux extrémités A & B, il sera donc tout au dessus, ou au dessous de lui comme l'on voit (Fig. 7.).

Soit $s = 2$, l'on aura $\mu = \frac{km}{2} = 0, = \frac{m}{2} = m$; &c. le poligone coupera donc l'axe au milieu C, & il aura par conséquent une moitié au dessus, & l'autre au dessous, comme dans la (Fig. 8.)

Soit

Soit $s = 3$, l'on aura $\mu = \frac{km}{3}$, $= 0$, $= \frac{m}{3}$, $= \frac{2}{m}$, $= m$ &c. Et le poligone rencontrera l'axe deux fois, & le divisera en trois parties égales, il aura donc une figure semblable à celle qu'on voit (Fig. 9.), & ainsi de suite. D'où l'on conclura que les poligones auront toujours autant de ventres d'égale longueur qu'il y a d'unités dans le nombre s.

30. Présentement si l'on s'attache à la seconde équation on trouvera en la réduisant, sin. $(2t\sqrt{e} \times \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m})$

$$= \frac{A\ \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{(B^2 + A^2 [\text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}]^2)}}$$ Posons pour abréger

$$\frac{A\ \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{(B^2 + A^2 [\text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}]^2)}} = Z,$$ on en tirera $2t\sqrt{e}\ \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}$

$$= \text{Arc. (sin. } Z), \ \& \ t = \frac{\text{Arc. (sin. } Z)}{2\sqrt{e}\ \text{sin.}\ \frac{s\pi}{4m}}.$$ Equation qui pourra être vraie quel que soit le nombre μ, parceque il n'y entre point; d'où il suit que les poligones ne peuvent jamais couper leurs axes en d'autres points, que dans ceux que nous avons déterminé ci-dessus, à moins qu'ils ne se confondent entiérement avec les axes mêmes, ce qui arrivera toutes les fois, que t aura la valeur assignée. Or comme il y a une infinité d'Arcs qui répondent tous aux mêmes sinus, la quantité t pourra aussi recevoir une infinité de valeurs. Pour les trouver soit θ le moindre Arc qui répond au sinus Z, & k un nombre quelconque entier, on aura généralement

$t =$

$$t = \frac{k\pi + \theta}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}, \text{ où encore } t = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{2} - \theta}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$$

il réſulte donc de cette formule qu'après que le poligone ſe ſera pour la premiére fois étendu en ligne droite, il retournera dans cet état à chaque intervalle de tems exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$, qu'on devra par conſéquent regarder comme le tems d'une oſcillation entiére, d'où l'on voit que ces tems, toutes choſes d'ailleurs égales, ſeront en raiſon inverſe de ſin. $\frac{s\pi}{4m}$, donc le tems d'une vibration pour la premiére figure ſera à celui de la ſeconde, de la troiſiéme, &c. comme ſin. $\frac{\pi}{2m}$ à ſin. $\frac{\pi}{4m}$; comme ſin. $\frac{3\pi}{4m}$ à ſin. $\frac{\pi}{4m}$, & ainſi de ſuite.

31. Les loix des mouvemens de chacun des poligones ſimples, nous feront aiſément connoître par leur combinaiſon ceux du poligone compoſé. Nous venons de voir que le premier poligone qui a pour axe la droite *AB* n'a qu'un ſeul ventre, & que ſes vibrations s'achévent dans un tems proportionel à $\frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{4m}}$; que le ſecond qui a pour axe celui-ci, contient deux ventres, & qu'il emploie dans chaque vibration un tems proportionel à $\frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2m}}$ & ainſi de ſuite. Il s'enſuit de-là, que, puiſque ces tems ſont preſque toujours incommenſurables entr'eux, il arrivera très-rarement que le poligone compoſé s'étende

tout en ligne droite; c'eſt pourquoi ſes vibrations paroitront tout-à-fait irréguliéres, quoiqu'elles ſoient compoſées d'un nombre de vibrations ſimples, réguliéres & iſocrones en elles mêmes.

32. Cette théorie générale que nous avons immédiatement déduit de nos formules, appliquée aux mouvemens des cordes vibrantes eſt la même que Mr. Daniel Bernoulli a inventé ſur ce ſujet, comme on l'a expoſé dans le Chapitre III.; ſi donc ce grand Homme a pû croire qu'une ſolution purement analitique étoit en elle même incapable de faire connoître la véritable nature de ces mouvemens, ces recherches pourront ouvrir une route nouvelle pour faire des applications de calcul à des ſujets qui n'en paroiſſoient pas ſuſceptibles, & ſervir à perfectioner l'Analiſe. Au reſte on ne peut trop eſtimer la ſagacité, & la pénétration de ce célèbre Géomètre, qui par un pur examen ſintétique de la queſtion propoſée eſt parvenu à réduire à des loix ſimples & générales des mouvemens qui ſemblent s'y refuſer par leur nature.

33. Avant que d'abandonner cette matiére, examinons encore les cas, où les vibrations compoſées peuvent dévenir ſimples & réguliéres.

Il eſt viſible que ceci arrivera toutes les fois que $y^{\mu} = \varphi^{\mu}$, ſavoir quand tous les termes exprimés généralement par φ^{μ} ſe réduiront à un ſeul quel qu'il ſoit. Soit s le quantiéme du terme reſtant, on aura par l'art. 27.

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times P^{s} \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{s\pi}{4m}\right)$$

$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{s} \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{s\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{4m}}$$

enſuite il faudra que $P^{I} = 0$; $P^{II} = 0$; $P^{III} = 0$ &c. juſqu'à P^{m-1}, excepté P^{s}; & de même $Q^{I} = 0$; $Q^{II} = 0$; $Q^{III} = 0$ &c. juſqu'à Q^{m-1}, excepté Q^{s}; d'où

l'on

l'on tirera les conditions réquises dans le premier état du sistème, afin que les vibrations des corps suivent les loix proposées. On aura donc ces deux équations

$$Y^{\text{I}} \text{ sin. } \frac{\sigma\pi}{2m} + Y^{\text{II}} \text{ sin. } \frac{2\sigma\pi}{2m} + Y^{\text{III}} \text{ sin. } \frac{3\sigma\pi}{2m} + \&c. + Y^{m-1} \text{ sin. } (m-1)\frac{\sigma\pi}{2m} = 0$$

$$V^{\text{I}} \text{ sin. } \frac{\sigma\pi}{2m} + V^{\text{II}} \text{ sin. } \frac{2\sigma\pi}{2m} + V^{\text{III}} \text{ sin. } \frac{3\sigma\pi}{2m} + \&c. + V^{m-1} \text{ sin. } (m-1)\frac{\sigma\pi}{2m} = 0$$

qui devront se vérifier quelque nombre qu'on pose au lieu de σ depuis 1, jusqu'à $m-1$, excepté s.

Que l'on compare maintenant cette équation avec celle de l'art. 24., il est évident qu'en substituant σ au lieu de λ, & s, au lieu de μ, les quantités Y & V seront déterminées de la même maniére que les quantités D; c'est pourquoi l'on trouvera généralement

$$Y^{\nu} = \pm \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\text{sin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{sin. } \frac{s\pi}{2m}}, \& V^{\nu} = \pm \frac{L^{\text{I}}}{2^{m-2}} \times \frac{\text{sin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{sin. } \frac{s\pi}{2m}}$$

où L, & L^{I} sont deux constantes arbitraires, qu'on pourra déterminer par la valeur de deux termes quelconques de la suite des Y & des V. Supposant donc que les deux premiéres quantités Y & V soient données, l'on aura $\frac{L}{2^{m-2}} = Y$, & $\frac{L^{\text{I}}}{2^{m-2}} = V$; d'où l'on tire enfin

$$Y^{\nu} = \pm Y \frac{\text{sin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{sin. } \frac{s\pi}{2m}}, V^{\nu} = \pm V. \frac{\text{sin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{sin. } \frac{s\pi}{2m}}$$ le signe supérieur répond à s impair, & l'inférieur à s pair.

Telle

Telles ſont les valeurs qu'il faudra donner d'abord aux viteſſes, & aux éloignemens des corps, afin que le ſiſtème ſouffre des vibrations ſimples & réguliéres, ſuivant les loix de l'eſpèce s^{me} qui contient s ventres, & dont le tems d'une oſcillation entiére eſt toujours exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$. L'on peut prendre dans ces formules le nombre s égal à 1, à 2, à 3, *&c.* juſqu'à $m - 1$, d'où il s'enſuit qu'on peut donner à tout le ſiſtème autant d'arrangemens différens, qui néanmoins ſeront tous propres à produire tant le ſincroniſme, que l'iſocroniſme des corps.

Ce problême a été déja réſolu par quelques Géomètres dans le cas d'un nombre de corps déterminé, mais la route qu'ils ont pris les a toujours conduit à des équations d'un dégré égal au nombre des corps mobiles, dont il falloit par conſéquent chercher les racines dans chaque cas particulier; je ne crois pas qu'on ait jamais donné pour cela une formule générale, telle que nous venons de la trouver.

CHAPITRE V.

Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt infini.

34. LA théorie du mélange des vibrations ſimples & réguliéres que nous venons d'établir découle de la forme même des équations trouvées. Or cette forme ſubſiſtera toujours, tandis que le nombre des corps mobiles ſera fini, ſavoir quand m ſera un nombre fini, mais ſera-t-il auſſi vrai que la ſuppoſition de m infini, ne défigure pas, pour ainſi dire, l'équation, & n'en altére pas éntiérement la forme? c'eſt ce que nous allons examiner dans ce chapitre.

Il eſt évident qu'en faiſant $m = \infty$ les angles $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ *&c.* deviendront infiniment petits, & que leurs ſinus ne différeront pas des Arcs qui leur appartiennent; ainſi l'on aura, $\text{ſin.}\ \frac{\pi}{4m} = \frac{\pi}{4m}$; $\text{ſin.}\ \frac{2\pi}{4m} = \frac{2\pi}{4m}$; $\text{ſin.}\ \frac{3\pi}{4m} = \frac{3\pi}{4m}$ *&c.* donc la formule qui donne la valeur de y^μ ſe changera en celle-ci.

$$y^\mu = \frac{2}{m} \times P^{\text{I}}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\ \frac{\pi t \sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times P^{\text{II}}\ \text{ſin.}\ \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\ \frac{2\pi t \sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times P^{\text{III}}\ \text{ſin.}\ \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\ \frac{3\pi t \sqrt{e}}{2m}$$

$+$ *&c.* à l'infini

$$+ \frac{4}{\pi\sqrt{e}} \times Q^{\text{I}}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi t \sqrt{e}}{2m}$$

+

$$+ \frac{4}{2\pi\sqrt{e}} \times Q^{II} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ fin. } \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{4}{3\pi\sqrt{e}} \times Q^{III} \text{ fin. } \frac{3\pi\mu}{2m} \times \text{ fin. } \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$+$ *&c.* à l'infini

l'on aura de même dans ce cas

$$u^{\mu} = -\frac{\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{I} \text{ fin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ fin. } \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$- \frac{2\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{II} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ fin. } \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$- \frac{3\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{III} \text{ fin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ fin. } \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$-$ *&c.* à l'infini

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{I} \text{ fin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ cof. } \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{II} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ cof. } \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{III} \text{ fin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ cof. } \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$+$ *&c.* à l'infini

35. Soient infiniment petites les maffes M des corps, en forte que leur fomme foit finie, & $= S$, on aura $m = \frac{S}{M}$, de plus fi a exprime la longueur de l'axe AB, on aura encore $m = \frac{a}{r}$, d'où $\frac{a}{r} = \frac{S}{M}$, & $r = \frac{aM}{S}$, donc la quantité e qui eft $= \frac{2Eh}{MT^2r}$ (art. 19.) deviendra $= \frac{2EhS}{T^2M^2a}$, & par conféquent $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{TMm} \sqrt{\left(\frac{2EhS}{a}\right)}$;

ou

ou bien puisque $m \times M = S$, il sera $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{T} \sqrt{(\frac{2Eh}{aS})}$ qui est une quantité finie, & toute connuë, qu'on supposera pour abréger $= \frac{H}{T}$.

36. Supposons que le rapport des nombres m, & μ soit celui de $a : x$; x exprimera l'abscisse dans l'axe AB, a laquelle repondra l'ordonnée y^{μ}, de même que la vitesse u^{μ}, l'on aura donc $\frac{\mu}{m} = \frac{x}{a}$; & faisant de plus dx constante, & égale à r, on aura $\frac{a}{dx} = m$; toutes ces valeurs substituées dans les formules ci-dessus l'on obtiendra généralement

$$y = \frac{2\,dx}{a} \times P^{I} \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \cos. \frac{\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{2\,dx}{a} \times P^{II} \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \cos. \frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{2\,dx}{a} \times P^{III} \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \cos. \frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+ \textit{\&c. à l'infini}$$
$$+ \frac{4T\,dx}{\pi H a} \times Q^{I} \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{4T\,dx}{2\pi H a} \times Q^{II} \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \sin. \frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{4T\,dx}{3\pi H a} \times Q^{III} \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \sin. \frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+ \textit{\&c. à l'infini}$$

& de même

$$u = -\frac{\pi H\,dx}{aT} \times P^{I} \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi H t}{2T}$$

$-2\pi H dx$

$$-\frac{2\pi H dx}{aT}\times P^{II}\ \text{fin.}\ \frac{2\pi x}{2a}\times\text{fin.}\ \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$-\frac{3\pi H dx}{aT}\times P^{III}\ \text{fin.}\ \frac{3\pi x}{2a}\times\text{fin.}\ \frac{3\pi Ht}{2T}$$

— *&c.* à l' infini

$$+\ \frac{2dx}{a}\times Q^{I}\ \text{fin.}\ \frac{\pi x}{2a}\times\text{cof.}\ \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \frac{2dx}{a}\times Q^{II}\ \text{fin.}\ \frac{2\pi x}{2a}\times\text{cof.}\ \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \frac{2dx}{a}\times Q^{III}\ \text{fin.}\ \frac{3\pi x}{2a}\times\text{cof.}\ \frac{3\pi Ht}{2T}$$

+ *&c.* à l' infini.

37. Préfentement il faut fubftituer dans ces formules les expreffions des quantités P^{I}, P^{II}, P^{III} *&c.* Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} *&c.* d' où en ordonnant les termes par les quantités connues Y^{I}, Y^{II}, Y^{III} *&c.* V^{I}, V^{II}, V^{III} *&c.* on trouvera autant de fuites infinies, dont chacune fera multipliée par une de ces quantités.

Soit $X : a$ la raifon générale des expofans des Y & des V au nombre m, X dénotera la partie de l'axe qui leur eft correfpondante dans le premier état du fiftème; donc fi l'on emploie le figne intégral $\int$ pour exprimer la fomme de toutes ces fuites, on aura

$$y = \frac{2}{a}\int dx\,Y\ \Big(\text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a}\times\text{fin.}\ \frac{\pi x}{2a}\times\text{cof.}\ \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \text{fin.}\ \frac{2\pi X}{2a}\times\text{fin.}\ \frac{2\pi x}{2a}\times\text{cof.}\ \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \text{fin.}\ \frac{3\pi X}{2a}\times\text{fin.}\ \frac{3\pi x}{2a}\times\text{cof.}\ \frac{3\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \&c.\ \text{à l' infini}\Big)$$

+ 4 T

$$+\ \frac{4T}{\pi Ha}\int dx V\ (\text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \frac{1}{2}\ \text{fin.}\ \frac{2\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{2\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \frac{1}{3}\ \text{fin.}\ \frac{3\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{3\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{3\pi Ht}{2T}$$

$+$ &c. à l'infini)

& de même pour u

$$u = -\ \frac{\pi H}{aT}\int dx Y\ (\text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+\ 2\ \text{fin.}\ \frac{2\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{2\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+\ 3\ \text{fin.}\ \frac{3\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{3\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{3\pi Ht}{2T}$$

$+$ &c. à l'infini)

$$+\ \frac{2}{a}\int dx V\ (\text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi x}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \text{fin.}\ \frac{2\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{2\pi x}{2a} \times \text{cof.}\ \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+\ \text{fin.}\ \frac{3\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{3\pi x}{2a} \times \text{cof.}\ \frac{3\pi Ht}{2T}$$

$+$ &c. à l'infini),

où il eſt à remarquer que les intégrations doivent ſe faire en ſuppoſant X, Y, & V variables, & t, & x conſtantes.

38. Si on refléchit maintenant ſur ces formules, on s'appercevra, que la premiere partie de l'expreſſion de y, & la ſeconde partie de l'expreſſion de u qui ne différent entr'elles, que par rapport aux quantités Y & V ſeront ſommables au moyen de la formule trouvée (art. 25.). Qu'on ſuppoſe donc, pour ſimplifier le calcul, que les

 quan-

quantités V s'évanouiſſent dans la formule de y, & les quantités Y dans celle de u, ce qui réduit le problême aux ſeuls cas conſidérés juſqu'à préſent dans les cordes vibrantes ; & on pourra ſe contenter de faire le calcul pour la valeur de y, puiſque en changeant ſimplement les Y en V on obtiendra tout de ſuite celle de u. Je raméne d'abord l'expreſſion $\text{ſin.}\,\frac{\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\,\frac{\pi H t}{2T}$ à celle-ci

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) + \text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right)}{2}$$

, & en opérant de la même maniére ſur toutes les autres je change la formule en

$$\begin{aligned} y = \tfrac{1}{a} \int dx Y \Big(& \text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) \\ & + \text{ſin.}\,\frac{2\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{2\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) \\ & + \text{ſin.}\,\frac{3\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{3\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) \\ & + \text{\&c. à l'infini} \Big) \\ + \tfrac{1}{a} \int dx V \Big(& \text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right) \\ & + \text{ſin.}\,\frac{2\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{2\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right) \\ & + \text{ſin.}\,\frac{3\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{3\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right) \\ & + \text{\&c. à l'infini} \Big). \end{aligned}$$

Or ſi l'on met dans la formule de l'art. 25. au lieu des quantités D leurs valeurs $\pm \frac{L}{2^m - 2} \times \frac{\text{ſin.}\,\frac{s\mu\pi}{2m}}{\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$ & qu'on

mul-

multiplie tout par 2^{m-2} ſin. $\frac{\mu\pi}{2m}$, on trouve généralement

$$\text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{2m} + \text{ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } \frac{2\lambda\pi}{2m} + \text{ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + \text{ſin. } (m-1)\frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \frac{\text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ. } \frac{\mu\pi}{2m}}$$, où le ſigne + a lieu, lorſque μ eſt impair, & le ſigne − lorſqu'il eſt pair, donc ſi l'on poſe $\frac{\mu}{m} = \frac{X}{a}$, & $\frac{\lambda}{m} = \frac{x}{a} \pm \frac{H}{T}$, il en réſultera

$$y = \pm \frac{1}{2a}\int \frac{dx\,Y \text{ ſin. } \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin. } \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right)}{\text{coſ. } \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) - \text{coſ. } \frac{\pi X}{2a}}$$

$$\pm \frac{1}{2a}\int \frac{dx\,Y \text{ ſin. } \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin. } \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} - \frac{mHt}{T}\right)}{\text{coſ. } \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right) - \text{coſ. } \frac{\pi X}{2a}}$$

Or puiſque m eſt infini, $m\left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T}\right)$ ſera toujours un nombre entier quels que ſoient x & t, donc l'on aura ſin. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} \pm \frac{mHt}{T}\right) = 0$, & par conſéquent les ter- termes qui conſtituent les intégrales exprimés par $\int$ s'évanouiront en général. Il y a pourtant un cas particulier à excepter, c'eſt celui où $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére intégrale, & $\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la ſeconde deviennent $= 2s \pm \frac{X}{a}$, s dénotant un nombre quelconque entier poſitif,

ou

ou négatif, car dans ces cas les dénominateurs cos. $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}) -$ cos. $\frac{\pi X}{2a}$, & cos. $\frac{\pi}{2}(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}) -$ cos. $\frac{\pi X}{2a}$ deviennent égaux à zero, & les termes se trouvent exprimés par $\frac{0}{0}$. Pour en déterminer les vraies valeurs on prendra la différentielle des numérateurs, & des dénominateurs, en considérant $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére formule, & $\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la seconde pour les seules variables; on mettra ensuite à leur place la quantité $2s$ $\pm \frac{X}{a}$; l'on trouvera donc en premier lieu

$$\frac{1}{2a}\int \frac{dx\,Y \text{ sin. } \frac{\pi X}{2a} \times \text{ sin. } \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{2a} + \frac{mHt}{T}\right)}{\text{cos. } \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) - \text{cos. } \frac{\pi X}{2a}} =$$

$$-\frac{m}{2a} \times \frac{dx\,Y \text{ sin. } \frac{\pi X}{2a} \times \text{ cos. } \frac{\pi}{2}\left(2ms \pm \frac{mX}{a}\right)}{\text{sin. } \frac{\pi}{2}\left(2s \pm \frac{X}{a}\right)}$$

Mais puisque $\frac{mX}{a}$ est un nombre infini $= \mu$ on a cos. $\frac{\pi}{2}$ $(2ms \pm \frac{mX}{a}) = \mp 1$, le signe supérieur répondant à μ impair, & l'inférieur à μ pair; l'on a de plus sin. $\frac{\pi}{2}$ $(2s \pm \frac{X}{a}) = \pm$ sin. $\frac{\pi X}{2a}$, donc l'expression précedente se réduit à $\pm \frac{m\,dx\,Y}{2a}$, ou bien puisque $a = m\,dx$ elle

devient

devient $\pm \frac{Y}{2}$, où Y eſt l'ordonnée qui répond l'abſciſſe X, ſavoir à l'abſciſſe $= \pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans le premier état du ſiſtème, d'où l'on voit que cette ordonnée doit toujours être priſe avec le même ſigne que toute la quantité $x + \frac{aHt}{T} \pm 2sa$. Que l'on dénote cette ordonnée par $\varphi . (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa])$; & que l'on dénote de même par $\varphi . (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])$ celle qui répond à l'abſciſſe $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & qu'on faſſe ſur la ſeconde partie de l'expreſſion générale de y, des opérations ſemblables à celle qu'on a pratiqué ſur la premiére, on trouvera enfin

$$y = \frac{\varphi . (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa]) + \varphi . (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])}{2}$$

39. Soit (Fig. 5.) AB l'axe, & AeB la courbe qui repréſente le premier état du ſiſtème dans le cas où le nombre des corps mobiles eſt infini, on trouvera la figure de cette courbe pour un tems quelconque t, en ordonnant à une abſciſſe quelconque x la quantité y égale à la moitié de la ſomme des appliquées qui répondent aux abſciſſes $\pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans cette premiére courbe donnée. A' l'égard des ſignes ambigus, & du nombre indéterminé s, on remarquera, que puiſque l'axe AB eſt d'une longueur donnée a, il faut que les abſciſſes qu'on y doit prendre ne ſurpaſſent pas la quantité a, & de plus qu'elles ſoient toujours poſitives, & ces conditions ſuffiront pour déterminer tout-à-fait chacune des abſciſſes en queſtion.

Si

Si $x + \frac{aHt}{T}$ eſt moindre que a, on ſuppoſera $s = 0$, & on prendra le ſigne $+$, & l'ordonnée ſera poſitive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ eſt plus grand que a mais moindre que $2a$, on fera $s = 1$, & on prendra le ſigne $-$, l'on aura donc l'abſciſſe $= 2a - x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être priſe négative.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera $s = 1$; & on prendra le ſigne $+$, l'abſciſſe ſera donc dans ce cas $x + \frac{aHt}{T} - 2a$, & l'ordonnée devra être de nouveau poſitive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ ſe trouve plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on fera $s = 2$, & on prendra le ſigne $-$, ainſi l'abſciſſe deviendra $4a - (x + \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée correſpondente devra être priſe négativement, & ainſi de ſuite.

Par un raiſonnement ſemblable, on trouvera que lorſque $x - \frac{aHt}{T}$ eſt poſitif, l'on doit faire $s = 0$; & qu'il faut emploier le ſigne $+$, ce qui donne l'ordonnée poſitive.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient négatif mais moindre que a, on ſuppoſera $s = 0$, & on prendra le ſigne $-$; l'on aura ainſi l'abſciſſe poſitive $-(x - \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée devra être priſe négativement.

Si

Si $x - \frac{aHt}{T}$ étant négatif eſt encore plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera dans ce cas $s = -1$; & on prendra le ſigne $-$, ainſi l' on obtiendra l' abſciſſe poſitive $-(x - \frac{aHt}{T}) - 2a$, & l'ordonnée devra être priſe négativement.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on continuera à faire $s = -2$, & on prendra de nouveau le ſigne $+$, ce qui donnera l'abſciſſe poſitive $4a + x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être encore poſitive; & ainſi de ſuite.

L'on voit aſſès par tous ces cas particuliers que nous venons de développer, que quelle que ſoit la longueur de l'abſciſſe, il ſera toujours poſſible de la réduire en ſorte qu'elle ne ſurpaſſe plus l'axe donné AB. On pourra ſimplifier encore cette réduction, en ſuppoſant que les abſciſſes données, ſoient repliées (pour ainſi dire) ſur l'axe une, ou pluſieurs fois, ſelon qu'elles ſe trouvent plus, ou moins excédentes, & les ordonnées devront enſuite être priſes alternativement poſitives, & négatives ſelon les loix ci-deſſus établies. Mais ſi l'on veut avoir une conſtruction tout-à-fait ſimple & générale, on pourra la déduire aiſément de la maniére ſuivante (Fig. 10.). Aiant tracé la courbe initiale ANB qu'on repéte ſa deſcription de part & d'autre à l'infini, en la poſant alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, de ſorte que les mêmes branches ſoient liées entr'elles par les mêmes extrémités. Conſidérant la courbe ainſi engendrée comme une courbe unique & continue, on prendra dans l'axe AB qui s'étend à l'infini de part & d'autre toutes les abſciſſes qu'on voudra, ſans s'embaraſſer qu'elles ſoient négatives, ou plus grandes que

que a, ainſi la demiſomme des ordonnés qui ſe trouveront répondre aux abſciſſes $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, quelle que ſoit la valeur de x & de t, donnera toujours la vraie ordonnée qui convient à l'abſciſſe x après le tems t.

40. Nous avons ſuppoſé $H = \sqrt{(\frac{2Eh}{aS})}$ (art. 35.) Or dans le cas de la corde vibrante E exprime le poid qui tend la corde a ſa longueur, & S ſon poid total; (art. 9. & 35.), on aura donc $H^2 = \frac{T^2c}{a^2}$ (art. 12.), & par conſéquent $\frac{aH}{T} = \sqrt{c}$; & les ordonnées, dont on doit prendre la demiſomme répondront aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$. Nous aurons donc par ce moien la conſtruction de la figure que forme une corde tendue pour un tems quelconque t en cas qu'elle ait été d'abord forcée de prendre une figure quelconque donnée, & qu'enſuite on l'ait relaché tout-à-coup, & cette conſtruction eſt évidemment la même que Mr. Euler a inventée ſur la même hypothèſe.

Voila donc la théorie de ce grand Géomètre miſe hors de toute atteinte, & établie ſur des Principes directs & lumineux, qui ne tiennent en aucune façon à la loi de continuité que demande Mr. D'Alembert; voila encore comment il peut ſe faire que la même formule qui a ſervi pour appuier & démontrer la théorie de Mr. Bernoulli ſur le mélange des vibrations iſocrones, lorſque le nombre des corps mobiles étoit finis, nous en dévoile l'inſuffiſance dans le cas où le nombre de ces corps devient infini. En effet le changement que ſubit la formule en paſſant d'un cas dans l'autre, eſt tel que les mouvemens ſimples qui compoſoient les mouvemens abſolus de tout le ſiſtème s'anéantiſſent pour la plus part, & que ceux qui reſtent

ſe

ſe défigurent & s'altérent de façon qu'ils deviennent abſolument méconnoiſſables. Il eſt vraiment facheux qu'une théorie auſſi ingénieuſe, & qui auroit pû ſans doute jetter des grandes lumiéres ſur des matiéres également obſcures qu'importantes, ſe trouve démentie dans le cas principal qui eſt celui, auquel ſe rapportent tous les petits mouvemens réciproques qui ont lieu dans la nature.

41. Si l'on veut que la corde ſoit étendue en ligne droite au commencement de ſon mouvement, & que tous ſes points reçoivent en cet état des viteſſes quelconques, on ſuppoſera que les ordonnées à la courbe ne repréſentent plus les premiers éloignemens de points de la corde de l'axe, mais les viteſſes des mêmes points au premier inſtant; & les courbes qu'on trouvera pour les inſtants ſuivans donneront de la même maniére leurs viteſſes ſuivantes (art. 38.).

CHAPITRE VI.

Refléxions ſur les calculs précédens.

42. LA méthode que j'ai emploié dans le Chapitre III. eſt à la vérité un peu longue, & fort compliquée; cependant elle eſt, ſi je ne me trompe, l'unique qui puiſſe conduire à une ſolution directe, & générale, telle que nous nous ſommes propoſé.

Quoique l'intégration des équations différentielles s'achève fort aiſément par l'ingénieuſe méthode de Mr. D'Alembert, cependant il eſt clair qu'on eſt encore après cela beaucoup éloigné du but principal, car il s'agit de plus de tirer d'un nombre indéfini d'équations autant d'inconnues,

nues, & de les exprimer toutes par une même formule générale. La difficulté de cette opération n'à pas ſans doute échapé au ſavant Géomètre, dont nous venons de faire mention; car aiant propoſé à réſoudre le problême des mouvemens des cordes vibrantes, en les regardant comme des fils extenſibles chargés de pluſieurs petits poids, il s'eſt contenté de dire qu'on auroit toujours pû trouver leurs vibrations *à peu près* (Voiés l'art. 44. de ſon Mémoire cité ci-deſſus).

Il ſeroit à ſouhaiter que l'Analiſe qui a réuſſi dans ce cas pût également s'appliquer à tous les autres qui dépendent de la réſolution d'un nombre indéfini d'équations différentielles toutes ſemblables entr'elles, & où les changeantes ne montent qu'à la premiére dimenſion; puiſqu'il eſt facile de démontrer que tous les petits mouvemens réciproques qui peuvent avoir lieu dans un ſiſtème quelconque de corps ſemblables, qui agiſſent les uns ſur les autres tous d'une même maniére, ſont néceſſairement contenus dans de telles équations. Nous ſerions par-là en état de ſuivre les actions de la nature de beaucoup plus près, qu'on n'a oſé le faire juſqu'à préſent.

J'ai déja tenté une ſolution générale du problême des vibrations des cordes élaſtiques, & des chaines péſantes; mais étant maintenant fort preſſé ſur l'impreſſion de cette piéce, & aiant d'ailleurs quelques autres occupations indiſpenſables, je ne puis pas pouſſer aſſès loin ces recherches, c'eſt pourquoi je me reſerve à traiter ce ſujet dans une autre occaſion.

Au reſte ſi on ſuppoſe dans notre cas que les corps ſe meuvent dans un milieu, dont la réſiſtance ſoit proportionelle à $\epsilon u + \alpha$, ϵ & α dénotant des conſtantes quelconques, la double intégration des équations differentielles réuſſira de même; & ſi les quantités ϵ & α ſont aſſès petites par rapport à la quantité e, on pourra encore

achever

achever le calcul par un procédé semblable à celui que nous avons exposé plus haut. Cette Analise pourroit être à la vérité de quelque utilité dans la recherche de la diminution du son, mais ce seroit s'écarter trop de l'objet principal que de la vouloir exposer ici tout au long.

43. La construction que nous avons trouvé dans le chapitre précédent pour le cas, où le nombre des corps mobiles est infini, est fondée entiérement sur ce qu'une suite infinie de produits de deux sinus, dont les Arcs croissent en progression arithmétique est toujours égale à zero, excepté dans le cas, où les sinus devenant égaux la suite donnée se change en une suite des quarrés des mêmes sinus. Quoique cette vérité découle immédiatement de la formule, que nous avons trouvé pour exprimer la somme d'une telle suite, cependant comme c'est-là un des points principaux de notre Analise, il ne sera pas hors de propos de démontrer encore la même proposition d'une autre maniére, qui soit & plus directe, & plus lumineuse.

Soit proposée la suite infinie

$$\text{sin.}\ \varphi \times \text{sin.}\ \theta + \text{sin.}\ 2\varphi \times \text{sin.}\ 2\theta + \text{sin.}\ 3\varphi \times \text{sin.}\ 3\theta + \&c.$$

si l'on développe chaque terme par les téorèmes de la multiplication des angles, on aura les deux series

$$\frac{\text{cos.}\ (\varphi - \theta) + \text{cos.}\ 2(\varphi - \theta) + \text{cos.}\ 3(\varphi - \theta) + \&c.}{2}$$

$$- \frac{\text{cos.}\ (\varphi + \theta) + \text{cos.}\ 2(\varphi + \theta) + \text{cos.}\ 3(\varphi + \theta) + \&c.}{2}$$

dont chacune est sommable par la théorie des progressions géométriques. Supposons pour simplifier le calcul, que la serie dont on veut prendre la somme soit généralement $\text{cos.}\ x + \text{cos.}\ 2x + \text{cos.}\ 3x + \&c.$ On réduira d'abord chaque terme aux expressions immaginaires exponentielles, ainsi l'on obtiendra

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} + e^{3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}$$

$$+ \frac{e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}$$

ces deux ſuites traitées comme deux progreſſions géométriques infinies, ſe changent par les règles connues en $\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{-x\sqrt{-1}})}$, & réduiſant au dénominateur commun $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} - 2}{2(2 - e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}$, ſavoir $\frac{\text{coſ. } x - 1}{2(1 - \text{coſ.} x)} = -\frac{1}{2}$, & telle eſt la valeur d'une ſuite quelconque infinie de coſinus, dont les Arcs croiſſent en progreſſion arithmétique. En appliquant ceci à notre cas, on trouvera la ſomme des deux ſuites données $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$, quelles que ſoient les valeurs des angles φ, & θ. Cependant lorſque $\theta = \varphi$, il eſt clair que les deux ſeries ſe réduiſent à $\frac{1 + 1 + 1 + 1 + \&c.}{2}$ $- \frac{\text{coſ. } 2\varphi + \text{coſ. } 4\varphi + \text{coſ. } 6\varphi + \&c.}{2}$ Si $m - 1$ eſt le nombre des termes dans chacune de ces ſuites, la ſomme de la premiére eſt néçeſſairement $= \frac{m-1}{2}$, la ſomme de la ſeconde eſt par ce que nous avons trouvé ci-deſſus $= -\frac{1}{2}$, donc la ſomme de toutes deux ſe trouvera dans ce cas $= \frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$.

44. Mais dira-t-on comment peut il ſe faire, que la ſomme de la ſuite infinie, coſ. x, + coſ. $2x$, + coſ. $3x$, + &c. ſoit toujours $= -\frac{1}{2}$, puiſque dans le cas de x

$= 0$,

$= 0$, elle devient néceſſairement égale à une ſuite d'autant d'unités ; je répons que cela provient des termes qui ſe détruiſent naturellement dans tous les cas excepté dans celui, où $x = 0$. Pour rendre la choſe plus ſenſible. cherchons la ſomme de la ſuite, coſ. x + coſ. $2x$ + coſ. $3x$ + &c. + coſ. mx ; on trouvera par la même méthode ci-deſſus qu'elle eſt égale à

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}} - e^{-(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{-x\sqrt{-1}})}$$

expreſſion qui ſe réduit à $\frac{\text{coſ. } x - 1 + \text{coſ. } mx - \text{coſ. } (m+1)x}{2(1 - \text{coſ. } x)}$
$= \frac{\text{coſ. } mx - \text{coſ. } (m+1)x}{2(1 - \text{coſ. } x)} - \frac{1}{2}$. Or dans le cas où m eſt un nombre infini, l'on ſuppoſe que l' 1 évanouiſſe auprès d'm, d'où le terme coſ. $(m+1)x$ devient $=$ coſ. mx, & la formule $\frac{\text{coſ. } mx - \text{coſ. } (m+1)x}{2(1 - \text{coſ. } x)}$ reſte $= 0$; mais lorſque $x = 0$ le dénominateur devient auſſi égal à zero ; c'eſt pourquoi elle reçoit une valeur donnée qu'on trouvera par la différentiation du numérateur & du dénominateur. On a donc en différentiant $\frac{(m+1) \times \text{ſin. } (m+1)x - m \text{ ſin. } mx}{2 \text{ ſin. } x}$ qui ſe réduit de nouveau à $\frac{0}{0}$ par la ſuppoſition de $x = 0$; qu'on différentie une ſeconde fois, il en viendra $\frac{(m+1)^2 \times \text{coſ. } (m+1)x - m^2 \times \text{coſ. } mx}{2 \text{ coſ. } x}$, & faiſant $x = 0$, $\frac{(m+1)^2 - m^2}{2} = m + \frac{1}{2}$; donc la valeur de la ſerie eſt dans ce cas $= m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = m$ préciſément comme l'on a vû plus haut.

Au reſte par la méthode de ſommer les ſuites des coſinus, ou ſinus, que nous venons d'expliquer, on trouvera que la ſuite finie, $\text{ſin. } \varphi \times \text{ſin. } \theta + \text{ſin. } 2\varphi \times \text{ſin. } 2\theta + \text{ſin. } 3\varphi \times \text{ſin. } 3\theta + \&c. + \text{ſin. } (m-1)\varphi \times \text{ſin. } (m-1)\theta$ eſt $= \frac{\text{ſin. } m\varphi \times \text{ſin. } (m-1)\theta - \text{ſin. } (m-1)\varphi \times \text{ſin. } m\theta}{2(\text{coſ. } \varphi - \text{coſ. } \theta)}$ ce qui convient avec ce qu'on a trouvé (art. 38.) en faiſant $\varphi = \frac{\lambda\pi}{2m}$, & $\theta = \frac{\mu\pi}{2m}$, & ſuppoſant μ un nombre entier quelconque.

45. Nous avons enſeigné dans l'art. 39. à conſtruire l'ordonnée y, & la viteſſe u, l'une dans le cas, où les viteſſes initiales V ſont $= 0$, & l'autre dans le cas, où les premiéres ordonnées Y ſont $= 0$; cependant ſi on vouloit une conſtruction générale pour tous les cas poſſibles, on pourroit la trouver moiennant les formules précédentes. Car on ſait que les expreſſions de u ne ſont autre choſe, que les différentielles de celles de y en prenant le ſeul tems t pour variable, & effaçant le dt; donc ſi après avoir réduit la premiére partie de l'expreſſion de y qui contient ſeulement les Y, par la méthode donnée (art. cité), on différentie la formule qui en réſulte, en ne regardant que le tems t pour variable, on aura la formule qui donne la valeur de la premiére partie de l'expreſſion de u, & qui contient auſſi les ſeules quantités Y. De même ſi l'on intégre par dt la formule réduite de la ſeconde partie de l'expreſſion de u, où ſe trouvent les ſeules quantités V, & qui eſt ſemblable à celle de y pour les quantités Y, comme on a vu (art. 38.) on aura la formule qui donnera la valeur de la ſeconde partie de l'expreſſion de y, qui contient de même les ſeules quantités V. Ces calculs ſont aſſès longs, & compliqués, & ils demandent d'ailleurs beaucoup de circonſpection, c'eſt pourquoi je ne fais que les indiquer ici pour montrer la route qu'on devroit

tenir

tenir pour parvenir à une réduction directe & générale des expressions données. Il est cependant visible qu'on pourra aisément s'en passer si on veut se contenter d'une construction des quantités y & u pour chaque tems t dérivée de celle qu'on a trouvé (art. 39.).

Soit donc, comme dans l'article cité, ANB la figure dont les ordonnées MN représentent les premiéres excursions Y, & anb celle dont les ordonnées expriment les vitesses initiales V. Qu'on réitère leur description de part & d'autre (Fig. 10. 11.) à l'infini de la maniére enseignée; qu'on construise ensuite deux autres courbes infinies (Fig. 12. 13.) $A^1 N^1 B^1$, $a^1 n^1 b$, dont la premiére $A^1 N^1 B^1$ soit telle que chaque ordonnée $M^1 N^1$ qui répond à l'abscisse $A^1 M^1 = AM$ soit toujours quatriéme proportionelle à la soutangente au point N, à l'ordonnée MN, & à l'unité; & la seconde $a^1 n^1 b^1$ ait ses ordonnées $m^1 n^1$, égales aux aires anm, qui répondent aux abscisses $am = a^1 m^1$. Par le moien de ces quatres courbes que je nommerai, comme celles de Mr. D'Alembert, courbes génératrices, on aura toujours l'ordonnée y, & la vitesse u pour chaque abscisse x, & pour quelque tems t que ce soit. Car on n'aura qu'à prendre dans la courbe ANB la demisomme des ordonnées qui répondent aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$; & dans la courbe $a^1 n^1 b^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondront aux mêmes abscisses; & la somme totale de ces quantités sera l'ordonnée y cherchée. De même pour la vitesse u, on prendra dans la courbe anb la demisomme des ordonnées qui appartiennent aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, & dans la courbe $A^1 N^1 B^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondent aux mêmes abscisses, & la somme totale de ces quantités donnera la valeur cherchée de la vitesse u.

Quoique

Quoique cette conſtruction ſoit entiérement fondée ſur les tangentes, & ſur la quadrature des courbes génératrices trouvées, il ne paroit cependant pas qu'elle puiſſe être ſujette aux difficultés que nous avons expoſées (art. 5.) Car, la conſtruction des courbes génératrices une fois établie, il n'eſt plus beſoin d'avoir recours aux théories du calcul différentiel & intégral, pour en déduire celles des autres courbes cherchées; puiſque on peut indépendemment de ces calculs par la ſimple conſidération des tangentes, & des quadratures, démontrer que ces courbes reſolvent le problême ſans avoir en aucune façon égard à la loi de continuité dans leurs équations.

Si l'on prend pour la courbe *ANB* la courbe initiale de la corde tendue, & que l'autre courbe *anb* repréſente les viteſſes qu'on donne à tous ſes points en la rélachant tout-à-coup, on aura de cette façon la ſolution générale du problême des cordes vibrantes telle que Mr. D'Alembert l'a eu en vuë dans l'art. XXIII. & ſuiv. ſon Mémoire. Il eſt vrai que ce grand Homme ne ceſſe d'inculquer que les expreſſions des viteſſes, & des excurſions initiales des points de la corde ne peuvent pas être données à volonté (art. XXXIV.) ce qu'il répete encore expreſſément dans l'art. II. de ſon Addition. Mais nous avons fait voir plus haut les raiſons qui obligoient cet Auteur à penſer ainſi, & ces raiſons ceſſent d'avoir lieu dès qu'on conſidére tous les points de la corde comme iſolés dans leurs mouvemens, comme nous l'avons fait dans les calculs précédens.

CHA-

CHAPITRE VII.

Théorie des cordes de Musique, & des Flutes.

46. LEs cordes, dont on se sert ordinairement pour les instrumens de Musique, sont de boïau ou d'acier, ou de cuivre; à l'égard des premiéres, elles n'ont presque point d'autre élasticité que celle qui est produite par la tension, mais il n'en est pas de même des autres, dont la roideur se manifeste même, lorsque elles sont tout-à-fait lâches. Cependant il est aisé de voir que la force de cette roideur pour mouvoir la corde, doit être bien petite par rapport à celle qui nait de la tension, d'où il s'ensuit que nous pouvons, sans crainte d'erreur, supposer toutes les cordes parfaitement flexibles, en tenant compte seulement de l'effet de la tension donnée. La maniére commune de les mettre en vibration, en les touchant par quelqu'un de leurs points, soit avec un archet, ou quelqu'autre instrument, consiste à les faire sortir de leur état de repos, & à donner à tous leurs points des impulsions quelconques. Donc si l'on a une corde uniformément épaisse, dont la masse & la longueur soient données, & la tension soit exprimée par un poid équivalant, on pourra toujours par la théorie exposée dans les chapitres précédens trouver le mouvement de cette corde pour un tems quelconque de quelque façon que ses vibrations aient été d'abord produites. Mais la connoissance des mouvemens particuliers des cordes est de peu de conséquence dans la pratique, & ce n'est qu'à la durée de leurs vibrations qu'il est important d'avoir égard, puisque c'est de-là que dépend, selon le sentiment généralement reçu par tous les Physiciens, le ton grave, ou aigu qu'elles doivent rendre.

Or ſi l' on éxamine la conſtruction des courbes génératrices expoſée (art. 45.), on s'appercevra aiſément que leur nature eſt telle, que ſi on augmente, ou qu'on diminue les abſciſſes d'un multiple quelconque de $2a$ les ordonnées correſpondantes demeurent tout-à-fait les mêmes; donc ſi l'on fait que la quantité $\frac{aHt}{T}$ qui doit être ajoutée, & retranchée de chaque abſciſſe x devienne un multiple quelconque de $2a$, on aura la valeur du tems t, après lequel la corde reprendra ſa premiére ſituation, avec les mêmes viteſſes dans tous ſes points. Ce tems ſera donc $= \frac{2sT}{H}$ quelque nombre entier poſitif qu'on poſe au lieu de s. C' eſt pourquoi le tems des oſcillations ſera toujours le même pour la même corde, & il ne dependra en aucune façon du premier ébranlement, qui peut varier à l' infini. Pour connoître plus exactement ce tems qui eſt $= \frac{2T}{H}$, on n'a qu'à remettre au lieu de H ſa valeur premiére $\surd\ (\frac{2Eh}{aS})$ (art. 25.), & on aura $T\ \surd\ (\frac{2aS}{Eb})$ pour le tems d' une oſcillation entiére, compoſée d' une allée, & d' une revenue, où a eſt la longueur de la corde, S ſon poid, E le poid qui eſt égal à la force de tenſion; or comme h exprime la hauteur d' où un corps péſant peut tomber librement durant le tems T (art. 6.), ſi l' on fait ce tems d' une ſeconde, on aura le tems cherché exprimé de même en ſecondes de cette façon $\surd\ (\frac{2aS}{Eb})$. Suppoſons que le rapport du poid de la corde, à celui qui la tend ſoit comme $a: b$, b ſera une quantité qui ne dependra que de l' épaiſſeur, & de la gravité ſpécifique de la corde; on aura donc

$\frac{S}{E} = \frac{a}{b}$, & par conſéquent la formule du tems des vibrations entiéres deviendra $= \frac{2a}{\sqrt{2bb}}$, & une oſcillation ſimple devra être cenſée d' une durée $= \frac{a}{\sqrt{2bb}}$ tout de même comme ſi la corde eut toujours fait ſes mouvemens ſelon les lois de Mr. Tailor. Cette formule a été regardée juſqu'à préſent pour vraie par tous les Auteurs qui ont écrit d' Acouſtique, parce qu'elle s'accorde entiérement avec les proportions connues des divers tons des cordes, qu'on a toujours fait dépendre de la durée de leurs oſcillations. C'eſt auſſi par cette raiſon que pluſieurs d' entr'eux ont cru qu'une corde tendue ne pouvoit reſonner à moins que ſes vibrations ne fuſſent toutes réguliéres & iſocrones comme celles des pendules; ce qui paroit ſans doute inconcevable vû qu'une même corde rend toujours le même ſon, lorſqu'elle eſt pincée, ou ébranlée de quelque façon que ce ſoit. La démonſtration que nous venons de donner peut donc ſervir à établir ces vérités généralement admiſes, ſavoir, que le ton d'une corde eſt toujours proportionel au nombre de ſes vibrations dans un tems donné, & que ce ton ſe conſerve toujours le même, tandis que la corde reſte dans les mêmes circonſtances.

47. Quoique la connoiſſance abſolue de la durée de chaque vibration dans une corde donnée ne ſoit guere d' uſage dans la pratique ordinaire, elle eſt cependant néceſſaire pour la détermination d'un ſon fixe, tel que Mr. Sauveur l'a eu en vue dans l' Hiſt. de l' Académie des Sciences de Paris pour l' année 1700. La méthode que ce ſavant Auteur a imaginée pour cela eſt à la vérité fort ingénieuſe, mais elle eſt preſque impraticable, à cauſe de l' extrème délicateſſe d'oreille qu'il faut pour apprécier

les momens des *battemens* de plusieurs sons, & de la grande difficulté qu'on rencontre à mésurer au juste l'intervalle du tems qui se passe entre deux de ces *battemens* consécutifs. Si la détermination de ce son fixe est de tant de conséquence, comme elle l'a paru à Mr. Sauveur, je crois qu'on pourra la tirer avec plus d'exactitude, & de facilité de la formule trouvée, qui ne requiert d'autres *données* que la longueur de la corde, sa gravité spécifique, & la raison de son poid à celui, par lequel elle est tendue. Par exemple si l'on veut selon Mr. Sauveur, que le son fixe rende 100 vibrations dans une seconde, on fera $\frac{a}{\sqrt{2bh}} = 100$, d'où b, & h étant donnés, on tirera $a = 100\sqrt{2hb}$.

48. Nous venons de voir que le nombre des vibrations d'une corde donnée est généralement toujours le même; il est cependant quelque cas particulier, où ce nombre peut être diminué, & réduit à la moitié, au tiers &c. Pour s'en convaincre on n'a qu'à refléchir, que la corde vibrante ne revient à son premier état, que parceque la construction des courbes génératrices est telle, qu'en levant, où ajoutant aux abscisses les tems donnés les ordonnées demeurent les mêmes. Donc si on suppose que la figure initiale de la corde participe déja à cette propriété, savoir qu'elle contienne deux, ou trois, ou plusieurs ventres égaux, & disposés alternativement au dessus, & au dessous de l'axe, & qu'il en soit de même pour la courbe des vitesses, on verra aisément que les courbes génératrices déduites de celles-ci rendront la corde à son premier état dans la moitié, le tiers &c. du tems donné. Ainsi la durée d'une oscillation se reduira dans ce cas à $\frac{a}{n\sqrt{2bh}}$, où n exprime le nombre des ventres primitifs. Il n'en sera pas de même si les ventres ne se trouvent

pas

pas égaux, & diſpoſés de la façon qu'on a dit, car il ſera toujours facile de démontrer, que les courbes réſultantes ne pourront jamais avoir les propriétés néceſſaires, afin que les vibrations puiſſent s' achever dans un tems différent de celui qui convient à la nature de la corde donnée. Mr. Euler avoit déja fait cette importante remarque pour le ſeul cas où la corde part du repos dans les Mémoires cités de l' Académie de Berlin.

49. Lorſque une corde eſt en vibration, il n'y a généralement parlant que les deux bouts qui reſtent toujours immobiles; cependant ſi l' on fait attention aux cas particuliers qu'on vient d' examiner, on voit clairement que tous les points, où la figure initiale de la corde coupe l' axe doivent néceſſairement demeurer en repos, puiſque il y a de part & d' autre des branches ſemblables ſituées alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe. Voions donc s'il ne pourroit pas y avoir d'autres points qui fuſſent revétus des mêmes propriétés.

Qu'on ſe repréſente pour cela une branche entiére *AMNB* de la courbe génératrice pour la corde *AB*; & qu'on ſuppoſe qu'un de ſes points quelconque *M* doive reſter immobile. (Fig. 14.) Il eſt d' abord évident qu'elle devra couper l' axe dans ce même point, il faudra enſuite que la partie *MN* de la courbe ſoit égale & ſemblable à la partie *AM*, afin que la demiſomme des ordonnées également diſtantes de part & d'autre ſoit toujours nulle, d'où il s'enſuit qu'à moins que le point *M* ne ſoit à la moitié de l' axe *AB* le point *N* tombera hors du point *B*, & ainſi la courbe cherchée *AMNB* coupera toujours l' axe en deux points *M* & *N*. Elle ſera par conſéquent compoſée de trois parties *AM*, *AN*, & *NB*, dont les deux premiéres ſont égales par ſuppoſition, & la troiſiéme eſt encore arbitraire. Or je dis que la courbe *AMNB* doit avoir toutes ces parties égales, ſemblables, & ſituées al-

terna-

ternativement au deſſus & au deſſous de l'axe *AB*. Pour s'en convaincre, qu'on refléchiſſe, que, puiſque les branches qui ſe trouvent ſituées de part & d' autre des deux points *A* & *M* doivent être ſemblables & égales dans toute la courbe génératrice engendrée par la deſcription réitérée de celle-ci, il faut que cette courbe ait toutes ſes parties de même nature que celle qui eſt compriſe entre les points *A* & *M*, d'où il ſuit que la partie de l'axe *NB* ne peut être qu'égale à la partie *AM* ou double, ou triple &c., ou encore la moitié, ou le tiers &c. de ſorte que l'axe entier *AB* puiſſe ſe diviſer en un nombre de parties égales, & aliquotes aux deux parties données *AM* & *MB*. Et toute la courbe *AMNB* devra dans ce cas couper l'axe à chaque point de ces diviſions, & elle devra contenir de plus autant de ventres égaux correſpondans.

On conclura donc que nul point d'une corde de Muſique vibrante ne pourra demeurer en repos, à moins qu'il ne la diviſe en deux parties commenſurables entr' elles ; que dans ce cas la figure initiale de la corde, & la courbe des premiéres viteſſes devront néceſſairement avoir autant de branches égales & ſemblables, qu' il y aura d'unités dans les deux parties *AM*, *MB*, & qui ſeront de plus ſituées alternativement au deſſus & au deſſous de chacune des parties aliquotes, dans leſquelles tout l' axe *AB* ſera diviſé. Si donc en mettant une corde en vibration, on fait enſorte qu'un point quelconque reſte immobile, ſans empêcher que la vibration ne ſe communique, & ne s'étende de part & d'autre à toute la corde, cette corde ſe diviſera naturellement en autant des parties égales qu' il en faut pour rendre commenſurables les deux parties coupées par le point immobile. D' où il s' enſuit que, lorſque ces deux parties ſont en elles mêmes incommenſurables, il ſera impoſſible que le point de leur diviſion puiſſe jamais reſter en repos, & la corde dans

ce

ce cas ſera obligée de changer de figure d'un inſtant à l'autre, ce qui détruira néceſſairement l'iſocroniſme, & la régularité de ſes vibrations. Mais dans le cas, où le point immobile diviſe toute la corde en parties commenſurables, il ſe formera pour lors un nombre de points de repos naturels, & la corde continuera de faire des oſcillations réguliéres & iſocrones, dont la durée ne ſera que la moitié, le tiers, le quart &c. de la durée des oſcillations entiéres, ſelon que les deux parties auront pour commune méſure la moitié, le tiers, le quart &c. de toute la corde, comme on l'a démontré (art. 48.).

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que ſi les points ſuppoſés immobiles coupent la corde en un nombre de parties quelconques elle ſe diviſera en autant de parties égales qu'il en faudra, pour que chacune d'elles méſure exactement chacune des premiéres parties coupées; par conſéquent ſi ces parties ſont entr'elles incommenſurables, les mouvemens de la corde deviendront irréguliers, pendant que dans tout autre cas les vibrations s'achéveront dans un tems proportionel réciproquement à celui des ventres naturels de la corde.

50. On s'eſt apperçu depuis long-tems qu'une corde pouvoit rendre dans certaines circonſtances des ſons aigus qui différoient plus, ou moins du ſon naturel, & on a même reconnu que ces ſons n'étoient preſque jamais que l'octave au deſſus, l'octave de la quinte, & la double octave de la tierce.

Mr. Sauveur qui a fort bien traité cette matiére dans ſon ſiſtème général d'Acouſtique, imprimé parmi les Mémoires de l'Académie Royale de Paris pour l'année 1701. s'eſt appliqué le premier, que je ſache, à découvrir la véritable origine de ces divers ſons rendus par une même corde qu'il appelle ſons harmoniques; il prend (Fig. 15.) pour cela une corde d'une longueur quelconque qui étant

pincée

pincée à vuide forme des vibrations ſimples & uniques qui rendent le ſon naturel de la corde qu' il nomme ſon fondamental ; il diviſe enſuite cette corde en un nombre de parties égales, & mettant un chevalet mobile, ou un autre obſtacle quelconque leger, au premier point marqué des diviſions, de ſorte que le mouvement qu'on donne à la corde puiſſe ſe communiquer de part & d'autre, & que l' obſtacle poſé ne faſſe d' autre effet que d' obliger le point, où il eſt appliqué, à reſter toujours en repos, cet Auteur obſerve que ſi l' on ébranle la corde dans cet état, elle ſe diviſe naturellement par une eſpèce d'ondulation en autant de ventres égaux, dont les extrémités qui reſtent immobiles répondent préciſément aux points marqués des diviſions; car aiant mis ſur la corde divers morceaux de papier, il trouve, que ceux qui ſont ſur les neuds ne ſont point du tout déplacés, les autres au contraire tombent auſſi-tôt que la corde commence de ſe mouvoir. Mr. Sauveur compare de plus les ſons harmoniques produits par une telle corde avec les ſons naturels d' autres cordes ſemblables, & il reconnoit que la longueur de celles-ci doit toujours égaler celle de la partie de la corde donnée qui eſt interceptée entre le chevalet & le bout plus proche. Il en eſt de même ſi le chevalet eſt placé à la ſeconde, troiſiéme &c. diviſion, & en général la corde forme toujours autant de neuds immobiles à égale diſtance les uns des autres qu'il en faut pour que le chevalet réponde à un d'eux, & le ſon rendu eſt toujours ſemblable au ſon que produiroit une des parties de la corde compriſe entre deux des points de repos naturels. Que ſi le chevalet diviſe la corde en deux parties incommenſurables, la corde ne fait pour lors que fremir, ſans réſonner, & l' on n' entend qu'une eſpèce de bruit confus & deſagréable à l'oreille.

51. L'on

L'on sait qu'en prenant le son d'une corde pour fondamental sa moitié rend l'octave au dessus, son tiers rend l'octave de la quinte, son quart rend la double octave du son fondamental, & la cinquiéme rend la double octave de la tierce; les autres divisions ne forment plus que des dissonances avec le son principal, à moins qu'elles ne donnent des octaves de ceux-ci. D'où il s'ensuit que l'on ne peut tirer d'une même corde d'autres sons harmoniques que la quinte, ou la tierce, en omettant les octaves qui peuvent être regardées comme des repétitions de leurs sons principaux. Ainsi la trompette marine qui est composée d'une seule corde, à laquelle on applique le doigt en la faisant résonner avec un archet, ne produit jamais d'autres sons que ceux qu'on vient de nommer, & le doigt tient lieu de l'obstacle leger qui divise les vibrations de toute la corde.

L'on a encore heureusement appliqué cette théorie à toutes les espèces de violons, où par le moien d'une legère pression de doigt on produit des sons harmoniques très agréables à l'oreille, & qui s'approchent beaucoup du son des flutes; on pourroit même, je crois, avec beaucoup d'exercice parvenir à exécuter sur le violon une piéce quelconque de Musique par des sons toujours harmoniques, car pour en tirer tous les sons nécessaires, il ne s'agiroit que d'ajuster sur les cordes deux doigts, dont l'un fut appuié fortement sur le manche, comme on le fait ordinairement, en appliquant en même tems l'autre au tiers, ou à la cinquiéme de la corde pour lui donner le son harmonique convenable. C'est aux habiles Musiciens à juger si l'exécution de ce projet n'est pas sujette à d'autres difficultés capables de rebuter les meilleurs Artistes.

52. Nous avons fait voir dans l'art. 9. que les mouvemens des parties de l'air qui composent une fibre éla-

ſtique continue, ne différent nullement de ceux des cordes vibrantes, ſi ce n'eſt en ce que les vibrations de celles-ci ſont perpendiculaires à l'axe, au lieu que les autres ſont longitudinales. Donc ſi l'on conſidére une fibre quelconque d'air, ou bien un amas de pluſieurs fibres renfermées dans un tuïau qui les borne, & les diſtingue de la maſſe continue de l'air extérieur, ces fibres pourront recevoir dans toutes leurs parties des mouvemens ſemblables à ceux des points d'une corde de Muſique d'égale longueur & d'égal poid, & dont la force de tenſion ſoit équivalente à celle de l'élaſticité naturelle de l'air. Si donc les mouvemens de ces fibres peuvent ſe communiquer à l'air extérieur, il en réſultera un ſon qui ſera de même nature qui celui qui ſeroit produit par la corde correſpondante.

Voila le principe, & l'origine de tous les inſtrumens à vent, qui conſtituent une claſſe d'inſtrumens de Muſique non moins étendue, & non moins importante que celle des inſtrumens à cordes.

Le célèbre Mr. Euler a tâché le premier de raprocher les théories de ces deux eſpèces d'inſtrumens dans une Théſe ſur le ſon imprimée à Bâle l'année 1727., & puis dans ſon excellent traité de Muſique qui a paru l'année 1739. Il compare en effet dans ces endroits la colomne d'air contenue dans un tuiau à une corde du même poid, & de même longueur, & qui ſeroit tendue par un poid égal à celui d'un cilindre de mercure, dont la baſe fut la même que celle du tuiau, & la hauteur celle du Baromètre. Par cette comparaiſon il détermine le ſon que doit rendre une flute quelconque donnée, & il le trouve entiérement d'accord avec l'expérience. Il faut avoüer, que cette théorie a été portée par ce ſavant Auteur au plus haut dégré de perfection, & qu'il n'y reſtoit rien à déſirer qu'une démonſtration analitique, & tirée de

la

la nature même des mouvemens qu' il a comparé ensemble. Mais pour mettre cette importante matiére dans tout son jour, développons-en ici encore quelque cas particulier. Soit une flute de longueur $= a$ depuis l'embouchure jusque à l'autre extrémité, soit b^2 la largeur de sa base, que je suppose être par tout la même; on aura par l' art. 46. la durée d'une oscillation aérienne $= \sqrt{\frac{Sa}{2Eb}}$, où S est le poid de la colonne d' air contenue dans la flute, & E son élasticité naturelle. Supposons donc k égal à la hauteur barométrique, & $1 : n$ la raison de la gravité spécifique de l' air à celle du mercure, on aura E égal au poid d' une colonne de mercure, dont la base est b^2, & la longueur $= k$; & S égal au poid d' une semblable colonne, dont la longueur soit seulement $= \frac{a}{n}$, d'où $\frac{S}{E} = \frac{a}{nk}$; & par conséquent le tems d' une oscillation sera $= \sqrt{\frac{a^2}{2nkh}} = \frac{a}{\sqrt{2nkh}}$, ce qui fait voir que ces tems, toutes choses d' ailleurs égales, sont comme les longueurs des flutes, auxquelles les tons répondent comme l' expérience nous l' enseigne en effet. Si l' on veut que la flute achéve 100 vibrations dans une seconde, ce qui produit le son fixe de Mr. Sauveur, on fera $\frac{100a}{\sqrt{2nkh}} = 1''$, d' où $a = \frac{\sqrt{2nkh}}{100}$; or nk exprime précisément la hauteur de l' air supposé homogène qui se trouve à peu près $= 850 \times 32$ pieds, & h est de 15 pieds environ; donc $2nkh$ sera $= 850 \times 32 \times 30 = 816000$, dont la racine quarrée se trouve 903 . 3 . . &c. ce qui étant divisé par 100 donne pour la longueur du tuiau 9 pieds & 33 milliemes de pied.

Il est vrai que Mr. Sauveur trouve d' après ses expériences des *battemens* que le tuiau d' Orgue qui rend le

 son

ſon fixe eſt ſeulement de 5 pieds, ce qui donneroit ſuivant la théorie environ le double des vibrations que cet Auteur a déterminé pour chaque ſeconde; mais il eſt aiſé de trouver la raiſon de cette différence ſi on reflèchit que les vibrations de deux cordes ne ſont réellement concurrentes, c'eſt-à-dire commençantes en même tems, & ſe faiſant dans le *même ſens* qu'après un nombre de vibrations double de celui qui eſt porté par la nature des deux cordes données, d'où il ſuit, que puiſque les *battemens* ne conſiſtent que dans la concurrence des vibrations, le nombre déterminé par l'expérience de Mr. Sauveur ſera préciſément la moitié de ce qu'il eſt en effet, & dans ce cas les réſultats de l'expérience s'accordent aſſès bien avec ceux de la théorie.

53. Puiſque les mouvemens des parties de l'air contenu dans une flute quelconque ſont les mêmes que ceux d'une corde de Muſique correſpondante, il s'enſuit que la durée de leurs vibrations pourra de même dans certains cas particuliers devenir moindre qu'à l'ordinaire, & n'en être plus que la moitié, le tiers, le quart &c., comme nous l'avons démontré dans les cordes vibrantes, lorſqu' elles ſe diviſent en pluſieurs ventres égaux. Or ceci arrive préciſément dans les inſtrumens à vent, lorſque on augmente d'une certaine façon la force du ſoufle; car c'eſt une vérité de long-tems reconnue dans les trompettes, & dans toutes ſortes de flutes, & ſur tout dans les traverſiéres, que par un ſimple changement d'embouchure l'on obtient depuis le ſon grave, ou fondamental, ceux qui y répondent comme les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ſavoir l'octave au deſſus la douziéme, la quinziéme, & la dix-ſeptiéme majeure; car le ſon ſuivant eſt proſcrit de l'harmonie du ſon principal.

Au reſte quelque fondée & plauſible que ſoit cette théorie des inſtrumens à vent, il faut pourtant avoüer qu'on ne ſauroit encore par ſon moien rendre raiſon de toutes les propriétés qu'on y obſerve, & qui regardent la forme de l'inſtrument, la largeur, & la poſition des trous. Car aiant méſuré au juſte leurs diſtances dans des bonnes flutes traverſiéres, & douces je ne les ai point trouvé tout-à-fait proportionnelles aux tons correſpondans. De plus l'on ſait que pour rendre certains tons, il faut une combinaiſon donnée de trous ouverts & bouchés ou entiérement, ou à demi ſeulement, ce qui me paroit fort difficile à expliquer par la ſimple comparaiſon des cordes vibrantes. Comme cette matiére demande un éxamen long & éxact de toutes les circonſtances qui entrent dans chaque cas particulier, & que d'ailleurs cette piéce eſt actuellement ſous preſſe, j'ai cru devoir différer ces recherches pour une autre occaſion ou, ſuivant quelques vues que j'ai déja formé, j'eſpère de pouvoir raméner aux lois de la théorie ci-deſſus établie la plûpart des bizarreries qui ſe rencontrent dans ces ſortes d'inſtrumens.

SECTION SECONDE

De la propagation du son.

CHAPITRE PREMIER

De la viteſſe du ſon.

54. IMaginons une fibre élaſtique compoſée d'un nombre infini m de particules d'air, dont une quelconque reçoive par l'ébranlement des parties du corps ſonore une impulſion donnée c, il s'agit de déterminer la loi ſuivant laquelle ce mouvement ſe communiquera aux autres particules de la même fibre. Soit AB (Fig. 15.) la longueur de toute la fibre $= a$, AC la diſtance de la particule C qui eſt frappée par le corps ſonore $= X$, & AD la diſtance d'une autre particule quelconque D, dont on veut ſavoir le mouvement $= x$, on trouvera par l'application des formules données (art. 35.) que la viteſſe u de cette particule ſera exprimée par une ſeule ſérie infinie, comme il ſuit

$$u = \frac{2c}{m} \Big(\text{ſin.} \frac{X\pi}{2a} \times \text{ſin.} \frac{x\pi}{2a} \times \text{coſ.} \frac{tH\pi}{2T}$$
$$+ \text{ſin.} \frac{2X\pi}{2a} \times \text{ſin.} \frac{2x\pi}{2a} \times \text{coſ.} \frac{2tH\pi}{2T}$$
$$+ \text{ſin.} \frac{3X\pi}{2a} \times \text{ſin.} \frac{3x\pi}{2a} \times \text{coſ.} \frac{3tH\pi}{2T}$$
$$+ \text{\&c. à l'infini} \Big).$$

Car tous les termes P^{I}, P^{II}, P^{III} &c. évanouiſſent par ſuppoſition, & les autres Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} &c. ſe réduiſent

à, $c \times$ ſin. $\frac{X\pi}{2a}$, $c \times$ ſin. $\frac{2X\pi}{2a}$, $c \times$ ſin. $\frac{3X\pi}{2a}$. Qu'on change maintenant le produit de ſin. $\frac{X\pi}{2a}$ par coſ. $\frac{tH\pi}{2T}$ avec les produits des ſinus & coſinus des autres angles multiples en des ſimples ſinus, & l'équation ci-deſſus deviendra

$$u = \frac{c}{m} \Big(\text{ſin.} \frac{x\pi}{2a} \times \text{ſin.} \Big[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}\Big] \frac{\pi}{2} + \text{ſin.} \frac{2x\pi}{2a} \times \text{ſin.} \Big[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}\Big] \frac{2\pi}{2} + \text{ſin.} \frac{3x\pi}{2a} \times \text{ſin.} \Big[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}\Big] \frac{3\pi}{2} + \text{\&c. à l'infini}$$

$$+ \text{ſin.} \frac{x\pi}{2a} \times \text{ſin.} \Big[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}\Big] \frac{\pi}{2} + \text{ſin.} \frac{2x\pi}{2a} \times \text{ſin.} \Big[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}\Big] \frac{2\pi}{2} + \text{ſin.} \frac{3x\pi}{2a} \times \text{ſin.} \Big[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}\Big] \frac{3\pi}{2} + \text{\&c. à l'infini} \Big).$$

On démontrera ici de la même maniére que nous avons fait (art. 38.) ſur des formules ſemblables, que ce deux ſuites infinies ſont toujours égales à zero, excepté dans le cas, où $\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére, & $\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la ſeconde deviennent $= \pm (\frac{x}{a} + 2s)$, s dénotant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif; d'où il s'enſuit que la viteſſe u dans chaque particule ne ſera, pour ainſi dire, qu'inſtantanée, & qu'elle n'obtiendra jamais aucune valeur réelle, que lorſque $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$ quels que ſoient les ſignes qu'on y veuille prendre.

Cette

Cette équation contient comme on le voit un certain rapport entre les eſpaces x, & les tems t, les autres quantités X, a, H, T, S demeurant conſtantes. Elle contiendra donc la loi générale, ſuivant laquelle ſe fait la propagation du ſon.

55. Pour développer cette importante matiére autant qu'il eſt poſſible, imaginons que la particule D qui reçoit ſon petit mouvement inſtantané au bout du tems t ſoit éloignée par $DC = z$ de la premiére particule C qui a reçu l'impulſion extérieure; l'on aura donc $AD = x = z + X$, laquelle valeur ſubſtituée dans l'équation ci-deſſus donnera $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{X+z}{a} + 2s \right)$, & multipliant par a, & tranſportant les termes $\pm \frac{Hat}{T} = z + 2sa$, ou bien encore $\pm \frac{Hat}{T} = -(2X + z + 2sa)$; & ces deux équations ſatisferont toujours également en prenant les ſignes ambigus comme on voudra. Or puiſque le tems t doit toujours être poſitif l'ambiguité des ſignes tombera néceſſairement ſur la quantité z qui pourra par conſéquent avoir des valeurs poſitives, & négatives, d'où il ſuit que le ſon partant du point C ſe propagera également de part & d'autre vers A & vers B. De plus il eſt viſible par ces formules que la communication du mouvement d'une particule à l'autre ſera toujours uniforme, & qu'elle ſe fera avec une viteſſe qui ne dependra en rien de la premiére viteſſe c imprimée extérieurement, puiſque l'expreſſion de cette viteſſe ne ſe rencontre nulle part dans la formule trouvée. Voici donc les lois que les ſons doivent toujours ſuivre dans leur propagation.

Une particule quelconque d'air ébranlée par le mouvement d'oſcillation d'un corps ſonore mettra en mouvement

vement les particules circonvoiſines, & celles-ci les autres qui les ſuivent dans les fibres rectilignes, qui partent toutes du même point comme d'un centre commun; ces mouvemens dans chaque particule ſeront inſtantanés, & ſe communiqueront toujours avec une même viteſſe conſtante, quelle que ſoit l'impulſion que la premiére particule ait reçu, d'où dépand la force, où la foibleſſe du ſon. Ce n'eſt donc pas par une eſpèce d'ondulation que le ſon ſe propage, comme l'ont cru juſqu'ici tous les Phyſiciens d'après Mr. Newton; en effet l'on a fait voir dans l'Introduction que cette hypothèſe eſt inſuffiſante pour en expliquer les principaux phénomènes, & qu'elle eſt, outre cela, ſujette à beaucoup d'autres difficultés qui la rendent tout-à-fait inſoutenable.

On voit de-là que le nombre des coups d'air qui viennent frapper nos organes, doit néceſſairement répondre au nombre des vibrations des particules des corps ſonores. Donc puiſque dans les cordes de Muſique la durée de leurs vibrations ne dépand que de leur nature, & nullement des ébranlemens extérieurs, on a la raiſon pour laquelle chaque corde rend généralement toujours le même ton quelle que ſoit la maniére avec laquelle on la mette d'abord en vibration, ce ton ne dépandant que de la groſſeur, de la longueur, & de la tenſion de la corde, comme on le ſavoit déja d'après la ſeule expérience. On appliquera encore le même raiſonnement au flutes, dont les mouvemens ont été prouvés ſemblables à ceux des cordes vibrantes. Et ſi on veut juger par analogie, on pourra l'étendre à tous les autres corps ſonores qui ont lieu dans la nature, & dont les oſcillations ne paroiſſent pas ſuſceptibles d'une juſte eſtimation analitique.

56. Mais pour retourner à notre formule: l'on a poſé (art. 35.) $H = \sqrt{(\frac{2Eh}{Sa})}$, par conſéquent on aura Ha

$= \surd\left(\frac{2Eah}{S}\right)$; & faiſant les mêmes ſuppoſitions de l'art. 52. on trouvera $Ha = \surd 2nkh$; par ce moien on aura $\pm \frac{t\surd 2nkh}{T} = z + 2sa$; $\pm \frac{t\surd 2nkh}{T} = -(2X + z + 2sa)$, d'où l'on tire par la différentiation $\pm \frac{dt\surd 2nkh}{T} = \pm dz$, ſavoir $\pm \frac{dz}{dt} = \frac{\surd 2nkh}{T}$, qui eſt l'expreſſion de la viteſſe abſolue du ſon, ſoit qu'il ſe propage de C vers B, ou de C vers A.

On peut évaluer cette expreſſion comme dans l'art. cité; mais afin de la pouvoir plus commodement comparer avec les formules déja connues, il ſera utile de la réduire aux méſures ordinaires des oſcillations des pendules. Soit l la longueur du pendule ſimple iſocrone, qui fait une oſcillation dans le tems T; l'on ſait qu'un corps péſant parcourt un eſpace $\frac{l}{2}$ dans un tems qui eſt à T comme le diamètre du cercle eſt à la circonférence; on aura donc ce tems $= \frac{2T}{\pi}$, & comme les eſpaces parcourus en tombant ſont comme les quarrés des tems, l'on aura de plus $h : T^2 = \frac{l}{2} : \frac{4T^2}{\pi^2}$, d'où l'on tire $h = \frac{\pi^2 l}{8}$, qui donnera $\pm \frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{2T} \surd nkl$; c'eſt pourquoi l'eſpace parcouru par le ſon dans le tems T d'une oſcillation du pendule l ſera $= \frac{\pi}{2} \surd nkl$. Il eſt à remarquer en premier lieu que la longueur a de la fibre aérienne ne ſe trouve plus dans cette formule de la viteſſe du ſon, d'où il ſuit qu'elle doit toujours être la même, ſoit que le ſon ſe propage dans des lieux ouverts, où l'Atmoſphère peut

être confidérée comme continuée à l'infini de toute part, foit qu' il fe trouve renfermé dans des détroits quelconques, où les fibres aériennes ne peuvent être que d' une longueur donnée.

L'expérience eft encore d'accord fur ce point de l'aveu de tous les Phyficiens; mais il y a plus: la formule que nous venons de trouver eft la même qui avoit déja été donnée par Mrs. Newton, & Bernoulli, & dont les réfultats fe trouvent affès conformes à la vérité, quoique ces deux Auteurs l' aient tiré de Principes infuffifans, & même fautifs, comme on l' a fait voir au commencement de cette Piéce. Pour fe convaincre de l'identité de ces formules nous n'avons qu'à nous rapeller la *Prop.* 49. de l' art. 4., où il eft dit que le fon doit parcourir un efpace égal à la circonférence du cercle, dont le rayon eft A, ou bien nk dans le tems qu'un pendule de même longueur fait une ofcillation entiére compofée d' un allée & d' une revenue; donc puifque Mr. Newton fuppofe le mouvement du fon uniforme, & que les tems des ofcillations des pendules font comme les racines quarrées de leurs longueurs, l' on aura l'efpace $\frac{\pi nk}{2}$ parcouru par le fon dans le tems d' une ofcillation fimple du pendule nk à l' efpace qu'il parcouroit dans le tems d' une femblable ofcillation du pendule l comme $\sqrt{nk} : \sqrt{l}$, d' où l' on tire cet efpace $= \frac{\pi}{2}\sqrt{nkl}$ tout de même comme on l' a trouvé par nôtre calcul.

57. Les réfultats de cette formule étant affès connus, je ne crois pas devoir m'arrêter à les éxaminer. On fait effectivement qu'elle ne donne que 979 piés pour chaque feconde, au lieu que les expériences moiennes donnent un efpace de 1142. Cette différence quoique affès grande en elle même ne monte néanmoins qu'environ à

 un

une dixiéme de l' eſpace total. D' ailleurs Mr. Newton expoſe dans le ſcolie à la *Prop.* 49. du ſecond Livre des Principes quelles peuvent en être les raiſons; au reſte il ne doit pas être étonnant que la théorie différe tant ſoit peu de l' expérience à l'égard des quantités abſolues; car on ſait que les expériences toujours aſſès compliquées ne peuvent jamais fournir des données ſimples, & debaraſſées de conditions étrangéres, telles que l' Analiſe pure les demanderoit.

Mr. Euler a donné à la vérité dans les endroits cités dans l' Introduction une formule plus approchante du vrai qui eſt d'une eſpace $= 4\sqrt{nkl}$; ce qui revient à 1222 piés par ſeconde dans les plus grandes chaleurs, & à 1069 dans les plus grands froids. Mais comme cet Auteur n' a pas laiſſé voir l' Analiſe qui l' a conduit à ce réſultat nous ne pouvons porter aucun jugement la deſſus. Je remarquerai ſeulement que Mr. Euler ſuppoſe, ſans le démontrer, que chaque globule d'air ſubiſſe des dilations & des contractions ſucceſſives qui ſe communiquent, ſuivant les lois de la communication du mouvement, aux particules contenues dans la même fibre avec une viteſſe conſtante, & la même pour tous les ſons ſoit forts, ſoit foibles [voiés la Théſe cité, art. 52., où il a donné pour la premiére fois la formule qu'il a enſuite repété dans la Diſſertation du Feu] ce qui peut ſervir, pour le dire en paſſant, à faire voir de combien notre théorie doit être préférable, malgré ſon inéxactitude ſur ce point.

CHA-

CHAPITRE II.

De la refléxion du son, ou des Echos.

58. NOus avons trouvé dans le chapitre précédent que les lois de la propagation du son sont contenues dans les deux formules générales.

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(z + 2X + 2sa)$$

Or il y a ici trois cas à distinguer. 1mo Quand l'air est tout-à-fait libre ce qui donne $a = \infty$, & $X = \infty$; 2do Quand l' air n' est libre que d' un côté, par éxemple quand il y a au point *A* de la fibre aérienne un obstacle invincible qui lui sert d'appui; dans ce cas l'on aura de même $a = \infty$, mais l'X qui est égal à *AC* sera fini, puisque il dénote la distance du corps sonore à l'obstacle qui est en *A*; 3° Quand les fibres de l'air sont terminées des deux côtés par des obstacles inébranlables aux extrémités *A* & *B*. L' on aura dans ce cas a fini, & égal à la distance des deux obstacles, & X sera de même fini, & exprimera la distance du corps sonore au premier obstacle *A*.

Examinons avec soin ces cas l' un après l' autre. Soit en premier lieu $a = \infty$, & $X = \infty$, X sera un infini moindre que a, parce qu'on doit toujours regarder la fibre comme infinie de part & d' autre du point *C*; ainsi l' on aura $X = \frac{a}{2}$, & les deux équations ci-dessus deviendront

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(z + [2s + 1]a).$$

Il eſt viſible que, a étant infini, le tems t n'obtiendra des valeurs finies que dans la premiére de ces équations, & dans le cas de $s = 0$; car l'on a ici $\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{2nkb}}$, où l'alternative des ſignes eſt néceſſaire afin que le tems t puiſſe toujours être poſitif ſoit que z ſoit poſitif, ou négatif. Donc il n'y aura dans ce cas qu'un inſtant donné, dans lequel chaque particule ſoit ébranlée; d'où il s'enſuit que dans l'air tout-à-fait libre le ſon ſera unique, & qu'on ceſſera de l'entendre dès que le corps ſonore aura fini ſes vibrations.

59. Suppoſons en ſecond lieu a infini & X fini, on tirera des valeurs finies de t des deux formules générales en poſant $s = 0$; la premiére nous donnera $\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$; & la ſeconde $\pm t = -\frac{T(z + 2X)}{\sqrt{(2nkb)}}$ Chaque particule ſera donc ébranlée deux fois de ſuite; le premier ébranlement arrivera comme dans le cas précédent, le ſecond lui ſuccédera après un intervalle de tems fini, qui dépendra des deux diſtances X & z. Donc quand il ſe trouve un obſtacle quelconque qui peut terminer les fibres aériennes d'un côté, il ſe formera une répétition du même ſon, laquelle ſera diſtinguée du ſon primitif ſi l'intervalle du tems entre l'un & l'autre ne ſe trouvera pas moindre d'une quinziéme de ſeconde, qui eſt le moindre eſpace requis pour que l'oreille puiſſe appercevoir diſtinctement deux ſons ſucceſſifs.

Pour méſurer au juſte cet intervalle, on diſtinguera deux cas, lorſque z eſt poſitif, & lorſqu'il eſt négatif. Dans le premier on aura $t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$, & $t = \frac{T(z + 2X)}{\sqrt{(2nkb)}}$, dont la différence eſt $\frac{2TX}{\sqrt{(2nkb)}}$; dans le ſecond on aura de même t

=

$= \frac{T z}{\sqrt{(2nkb)}}$; & l'autre valeur ſera $t = \frac{T(2X - z)}{\sqrt{(2nkb)}}$ dont la différence ſe trouvera $= \frac{2T(X - z)}{\sqrt{(2nkb)}}$.

Cette différence ſera donc dans le premier cas égale au tems que le même ſon met à parcourir un eſpace $= 2X$; & dans le ſecond égale au tems qu'il lui faudroit pour parcourir l'eſpace $= 2X - 2z$. Or comme le ſon qui part du point C (Fig. 15.) ſe propage de part & d'autre, l'on concevra clairement la formation du ſon répété, ſi on imagine que celui qui eſt propagé vers A, ſoit pour ainſi dire refléchit par le point A; & qu'il retourne en arrière avec la même viteſſe; ainſi lorſque z eſt poſitif, & que l'oreille eſt en D de l'autre part de l'obſtacle, elle recevra premiérement l'impreſſion du ſon qui a parcouru l'eſpace CD enſuite elle ſera de nouveau frappée par un ſemblable ſon qui aura parcouru l'eſpace $CA + AD$, ſavoir $2CA + CD$ ce qui donne préciſément, pour la différence des tems, un tems proportionel à l'eſpace $2CA = 2X$. Au contraire ſi z eſt négatif, & que l'oreille ſoit placée en D' entre le corps ſonore, & l'obſtacle, ce ſera le même ſon qui part de C vers A qui ſe fera entendre deux fois, le premier tems repondra à l'eſpace $CD' = z$; & le ſecond à l'eſpace $CA + AD = 2X - z$, dont l'intervalle repond au juſte à l'eſpace $2X - 2z$.

Le phénomène de la répétition du même ſon eſt un des plus connus dans la nature; on l'appelle ordinairement *Echo*, & on voit en effet qu'il eſt produit par des obſtacles quelconques qui interceptent le ſon, & l'obligent pour ainſi dire à rebrouſſer chemin, tels ſont par exemple les montagnes, les bois épais, les rochers, les cavernes, & même les nuées qui ſe trouvent à côté des corps ſonores.

60. Mais

60. Mais achevons l'éxamen des nos formules, & passons au troisiéme cas, où a & X sont deux quantités finies. Il est d'abord évident que les deux équations nous donneront ici une infinité de valeurs pour le tems t qui répondront à autant d'instans, où une même particule d'air sera remuée. Pour les développer supposons successivement $s = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$ &c. on tirera de la premiére équation

$$\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$\pm$ &c.

& ainsi de suite

La seconde nous donnera

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$\pm$ &c.

On conclut de-là que quand les fibres sonores de l'air sont terminées des deux côtés par des obstacles immobiles, qui en appuient & soutiennent les extrémités, il doit pour lors y avoir une infinité de répétitions du même son, savoir

ſavoir un Echo compoſé qui dureroit toujours ſi la conſtitution de ces fibres ne pouvoit jamais être altérée. Pour connoître la progreſſion des tems, au bout deſquels doit ſe faire une des répétitions, nous remarquerons que chacun des tems t dans les équations précédentes, eſt égal au tems que le ſon emploie à parcourir les eſpaces correſpondans z, $z + 2a$, $z - 2a$, &c. $z + 2X$, $z + 2X + 2a$, $z + 2X - 2a$ &c. Donc ſi l'on conſidère toujours ces eſpaces poſitifs, on pourra les repréſenter par les parties de la ligne AB de la maniére ſuivante.

1.re Série.

CD
$CB + BA + AD$
$CA + AB + BD$
$CB + BA + AB + BD$
$CA + AB + BA + AD$
& ainſi de ſuite.

2.de Série.

$CA + AD$
$CA + AB + BA + AD$
$CB + BD$
$CB + BA + AB + BD$
& ainſi de ſuite.

Si l'on conjoint ces deux ſéries, on en tirera ces deux-ci
CD
$CB + BD$
$CB + BA + AD$
$CB + BA + AB + BD$
&c.
$CA + AD$
$CA + AB + BD$
$CA + AB + BA + AD$
&c.

La nature & l'arrangement des termes qui composent ces progreſſions, fait aſſès connoître comment le même ſon qui part du corps ſonore qui eſt en C, doit revenir pluſieurs fois frapper l'oreille au même endroit D. Car on voit aiſément que la premiére de ces derniéres ſuites exprime le chemin du ſon propagé de C vers B, & refléchi d'abord par l'obſtacle B, enſuite par A, & de nouveau par B, & ainſi à l'infini. Au contraire la ſeconde exprime de même les lois des allées, & revenues du ſon, qui partant du même endroit C ſe meut d'abord vers A, d'où il eſt enſuite porté vers B, & de-là de nouveau vers A, & ainſi alternativement. Et ces deux ſons achèvent pour ainſi dire leurs mouvemens dans le même eſpace AB, & dans le même tems ſans ſe troubler, ou s'entrempêcher en aucune façon dans leurs rencontres. Donc toutes les fois que chacun d'eux paſſera par le même point D, on entendra dans cet endroit une répétition, ou bien un écho du ſon primitif.

C'eſt ainſi que ſe forment les échos composés qui répétent pluſieurs fois le même ſon en différens tems, qui ne ſont pas toujours égaux entr'eux, ſelon que le corps ſonore, & le point d'où l'on veut entendre l'écho ſe trouvent différemment placés ſur la ligne qui joint les deux obſtacles.

61. Les Phyſiciens rapportent quelques exemples de ces échos composés, entre leſquels il en eſt qui répétent le même ſon plus de cinquante fois de ſuite, & on obſerve toujours qu'ils ſont produits par des murs ou des rochers, ou des autres obſtacles quelconques ſitués preſque vis-à-vis. La plûpart d'entr'eux ont cru pouvoir expliquer ces phénomènes par la théorie de la refléxion; car diſent-ils, les particules de l'air qui eſt en vibration rencontrant des obſtacles invincibles ſont refléchies à peuprès comme l'on concoit que le ſont les rayons de la

lumière

par les ſurfaces unies des miroirs ; & cette explication paroit d'autant plus plauſible, qu'on trouve en effet par expérience que l'intervalle du tems écoulé entre deux ſons conſécutifs, eſt précifément tel qu'il le faut pour que le ſon principal puiſſe être refléchit par les obſtacles donnés, & revenir à l'oreille.

Cependant à examiner la choſe à fond, on ſera obligé de convenir que le Principe de la refléxion, comme on la conçoit ordinairement dans le choc des corps, ou dans la lumière, eſt ici un Principe tout-à-fait illuſoire. Car l'expérience nous montre que l'écho ne dépend en rien du poli de la ſurface refléchiſſante, puiſque il arrive que des ſurfaces en apparence polies ne produiſent point d'écho, au lieu qu'on l'entend ſouvent dans des lieux remplis de mille inégalités. En effet comment concevoir que des rochers, des forets, des nuées ſoient propres à produire dans l'air une refléxion ſemblable à celle des rayons de la lumière ſur les miroirs. Rien donc n'eſt moins fondée que cette Catoptrique des ſons que l'on a inventé pour rendre raiſon des propriétés de l'écho. Mr. D'Alembert eſt, peut-être, le premier qui aie ſenti l'inſuffiſance de cette théorie, dans l'Enciclopédie au mot *Echo*; mais ni lui, ni aucun autre que je ſache n'a jamais entrepris de donner des explications plus fondées de ce phénomène.

La théorie que nous venons de déduire de nos formules eſt, ce me ſemble, tout-à-fait à l'abris de ces difficultés; car il ne faut autre choſe pour produire l'écho, ſi non que les extrémités des fibres aériennes ſonores trouvent un appui fixe, de quelque nature qu'il ſoit; s'il n'y a qu'un obſtacle d'un côté le ſon ne ſera renvoié qu'une fois; c'eſt l'écho ſimple. S'il y en a deux qui terminent la fibre de part & d'autre les ſons ſeront renvoiés réciproquement, ce qui formera des échos compoſés qui dureront autant que la conſtitution des fibres ſo-

 nores

nores pourra ſubſiſter; ſi donc ces ſortes d'échos durent plus, ou moins, ce ſont toujours quelques circonſtances extérieures qui en ſont cauſe. Mais dira-t-on, pourquoi n'entend-on pas d'écho toutes les fois que l'air eſt renfermé entre quelques obſtacles. Les Phyſiciens ont déja répondu à cette difficulté en faiſant voir qu'il faut une certaine diſtance entre le point, d'où l'on veut entendre l'écho, & l'obſtacle qui doit le renvoier, de même qu'entre le corps ſonore, & cet obſtacle, afin qu'on puiſſe le diſtinguer du ſon primitif. Sans cela le ſon reflechi ſe confond entiérement avec le direct, & ne fait qu'en augmenter la force, comme on l'obſerve tous les jours. Il faut de plus que l'eſpace que l'écho doit parcourir ne ſoit embaraſſé par aucun corps qui en empêche la propagation. Lorſque ces conditions auront lieu je ne doute pas qu'il n'y ait toujours des échos; la conſtruction des échos artificiels eſt appuiée ſur ces ſeuls Principes.

CHAPITRE III.

Du mélange, & du rapport des ſons.

62. JE n'ai traité juſqu'ici de la propagation du ſon que dans le cas qu'il n'y ait qu'un ſeul corps ſonore qui communique ſes vibrations aux parties contigues de l'air; il nous reſte à voir ſi les lois trouvées ont de même lieu quand pluſieurs ſons ſont excités en même tems dans divers endroits, & en quelle maniére ces ſons peuvent ſe répandre dans le même eſpace ſans ſe troubler, ou ſe confondre en aucune façon, comme nous le montre l'expérience journaliére.

Sup-

Concevons donc dans la même fibre aérienne sonore AB (Fig. 16.) divers points physiques C', C'', C''', qui soient frappés en même tems par des corps sonores, qui différent les uns des autres comme on voudra; soient représentées par c^{I}, c^{II}, c^{III} &c. les impulsions, où les vitesses communiquées à ces points, & que X^{I}, X^{II}, X^{III} &c. désignent leurs distances AC', AC'', AC''' &c. de la première extrémité donnée A, on trouvera pour la vitesse u d'un point quelconque D de la même fibre qui est éloignée de A par l'intervalle $AD = x$, l'expression générale suivante.

$$u = \frac{2c^{I}}{m}\Big(\text{sin.}\frac{X^{I}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{sin.}\frac{2X^{I}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{2tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{sin.}\frac{3X^{I}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{3tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{\&c. à l'infini}\Big)$$

$$+ \frac{2c^{II}}{m}\Big(\text{sin.}\frac{X^{II}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{sin.}\frac{2X^{II}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{2tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{sin.}\frac{3X^{II}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{3tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{\&c. à l'infini}\Big)$$

$$+ \frac{2c^{III}}{m}\Big(\text{sin.}\frac{X^{III}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{tH\pi}{2T}$$

$$+ \text{sin.}\frac{2X^{III}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{2tH\pi}{2a}$$

$$+ \text{sin.}\frac{3X^{III}\pi}{2a} \times \text{sin.}\frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.}\frac{3tH\pi}{2a}$$

$$+ \text{\&c. à l'infini}\Big)$$

$$+ \text{\&c.}$$

Or

On raméñera ces expressions à la forme de celles de l'art. 54., & il viendra, comme il est aisé de le voir, une suite de formules toutes semblables entr'elles, & semblables à celle qu'on a trouvé pour le cas d'une seule impulsion donnée c. Or afin de connoître ce qui arrivera, lorsque une même particule d'air sera ébranlée par plusieurs sons divers, il faut chercher la valeur d'u au moment de l'ébranlement, & en suivant le même procédé qu'on a enseigné, art. cité, on trouvera que chacune des expressions qui composent la valeur générale de u, se réduira à $\pm c^{I}$, $\pm c^{II}$, $\pm c^{III}$ &c., selon que le tems t répondra aux formules $\frac{X^{I}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$; $\frac{X^{II}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$; $\frac{X^{III}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$ &c., où il est à remarquer que l'alternative des signes des quantités c^{I}, c^{II}, c^{III} &c. doit répondre exactement à celle des quantités $\frac{x}{a} + 2s$.

On voit de-là que lorsqu'il n'y a qu'une de ces équations qui soit vérifiée, u retient la même valeur c qu'il a eu au commencement; mais quand plusieurs ont lieu dans même tems, la valeur d'u devient composée des premiéres valeurs c^{I}, c^{II}, c^{III} &c. Donc puisque chacune des équations répond, pour ainsi dire, à chacun des sons particuliers propagés ensemble, cette propagation se fera toujours de la même maniére par rapport à chacun d'eux, comme s'il eut été seul, & il se communiquera d'une particule à l'autre la même impulsion qui a été produite par le corps sonore; par conséquent lorsque deux, ou plusieurs sons se rencontreront, la particule d'air qui se trouve dans leur point de rencontre recevra une impulsion composée des impulsions particuliéres qui constituent la nature de chacun d'eux; & passé ce moment, ils conti-

nueront

nueront leur chemin comme auparavant, tout de même comme on a vu qu'il arrive dans les échos composés.

63. Nous avons donc trouvé dans nos formules le développement d'un des principaux points de la théorie du son, qui regarde la maniére, avec laquelle l'air est capable de transmettre à l'oreille sans mélange les impressions de plusieurs sons différens. Cette vérité qui est une des plus connues par expérience a cependant embarassé si fort les Physiciens jusqu'à présent, que les plus habiles ont été obligés de recourir à des sistèmes pour en rendre raison. Les principaux se réduisent à deux; celui du mélange des vibrations isocrones proposé par Mr. Daniel Bernoulli; & celui de la différente élasticité des particules de l'air inventé par Mr. De-Mairan. Pour ce qui est du premier nous en avons vu l'insuffisance dans le Chap. V. A l'égard de l'autre il suffira de remarquer que la différente nature des particules de l'air ne peut influer que sur la vitesse du son, comme il résulte de la formule donnée (art. 56.); mais que pour ce qui est de leur ébranlement, il ne dépand que de la nature du corps sonore, dont les parties frappent dans leurs oscillations indistinctement toutes celles de l'air contigu. On peut voir dans l'Article *Fondamental* de l'Encyclopédie les autres raisons qui rendent ces deux sistèmes insoutenables, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

64. Nous venons de voir que la particule d'air qui se trouve dans la rencontre de deux sons, reçoit un ébranlement différent de celui qui est produit par chaque son en particulier; donc si les sons sont de telle nature que leurs vibrations concourrent toujours après un certain tems donné, l'impression suivie & régulière de ces ébranlemens composés pourra être distinguée des autres impressions particuliéres, & une oreille assès éxercée entendra un troisiéme son, dont le rapport avec les autres se trouvera en

com-

comparant le nombre des vibrations particulières, que chacun d'eux achève entre deux concurrences ſucceſſives. On devra donc entendre ce troiſiéme ſon préciſément au point de milieu de la ligne qui joint les deux corps ſonores, parceque les ſons aiant toujours une même viteſſe, c'eſt là qu'il doivent néceſſairement ſe rencontrer; cependant ſi l'on conſidère la maſſe continue de l'air, on voit que chaque particule d'une fibre ſonore doit être conſidérée comme le centre d'une infinité d'autres fibres, auxquelles elle peut auſſi communiquer du mouvement, ce qui fait que le ſon ſe propage en tous ſens; d'où il ſuit que l'ébranlement compoſé, pourra être de même porté à l'oreille dans une infinité d'autre endroits; quoique avec moins de force & moins diſtinctement à cauſe de la diminution & de l'altération cauſée par les réſiſtances des particules éthérogènes, dont toute la maſſe de l'air eſt parſémée.

Comme il faut une extrème fineſſe d'oreille pour appercevoir ces ſons compoſés, auſſi n'y a-t-il que quelques uns des plus habiles Artiſtes qui les aient reconnus. Mr. Tartini eſt le premier, que je ſache, qui ſe ſoit attaché à les examiner avec ſoin, comme on peut le voir dans ſon Traité de Muſique imprimé à Padoue l'année 1754. Ce célèbre Auteur nous apprend qu'en tirant d'un même inſtrument capable de tenue, comme les violons, les trompettes &c. deux ſons à la fois, ou bien en les tirant de deux inſtrumens éloignés l'un de l'autre de quelques pas, l'on en entend un troiſiéme qui eſt d'autant plus ſenſible, qu'on ſe rapproche de plus du point de milieu de l'intervalle donné.

Après beaucoup d'expériences ſur ce ſujet Mr. Tartini conclut que ſi l'on conſidère la ſuite des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c., & qu'on ajuſte autant de ſons qui

aient

aient le même rapport entr' eux, que les termes de cette ſuite, deux ſons voiſins quelconques produiront toujours, pour troiſiéme ſon, le prémier ſon qui répond au terme $\frac{1}{2}$. Or en éxaminant la concurrence des vibrations de tous ces ſons, on trouve, qu' elle ne peut avoir lieu qu' après un nombre de vibrations égal aux dénominateur de la fraction qui exprime les ſons correſpondans; ainſi les deux ſons exprimés par $\frac{1}{5}$, & par $\frac{1}{6}$ ne deviennent concurrens, qu' après cinq vibrations du premier & ſix du ſecond, & ainſi des autres; d' où il s' enſuit qu' en comparant le nombre des concurrences au nombre des vibrations de chaque ſon particulier, le troiſiéme ſon produit par deux de la ſérie précédente devroit toujours être exprimé par 1, ce qui donne proprement l'octave de celui qui eſt réſulté à Mr. Tartini. Mais l' on ſait que la différence entre un ſon, & ſon octave eſt ſouvent inſenſible à l'oreille, par la facilité naturelle que nous avons de les confondre enſemble; donc ſi l' on ſubſtitue au troiſiéme ſon de Mr. Tartini ſon octave au deſſous, les réſultats de ces éxperiences deviendront en tout conformes à ceux que nous donne notre théorie. L' on doit être d' autant plus porté à admettre cette échange d' un ſon dans ſon octave, que Mr. Serre dans ſon Ouvrage ſur les Principes de l' Harmonie de 1753. en faiſant mention des expériences de Mr. Tartini, nous rapporte, que les troiſiémes ſons produits par des tierces majeures, & mineures, ſe trouvent preciſément à l' octave baſſe de ceux de Mr. Tartini.

Nous avons parlé plus haut de l' éxperience des *battements* de Mr. Sauveur, & nous avons vû qu' ils répondent exactement aux concurrences des vibrations; il y à

donc tout lieu de croire qu' ils ſont de même formés par la rencontre de deux ſons , & qu' ainſi leur explication dépend entierement de la théorie que nous venons de donner ; Il eſt donc vraiſemblable que le troiſiéme ſon de Mr. Tartini n' eſt produit , que par une ſuite de *battemens*, & dans ce cas il eſt très aiſé de réconnoître, que le troiſiéme ſon doit avoir avec les deux ſons primitifs le rapport que nous avons ci-deſſus établi.

Ce ſeroit ici le lieu d' examiner la nature, & la ſource des conſonances, & des diſſonances ; mais il faut avouer que, malgré les efforts de pluſieurs habiles Muſiciens, on n' eſt pas encore parvenu à établir la-deſſus des fondemens conſtans, & généraux; Mr. Sauveur eſt dans l' idée qu' un accord plait d' autant plus à l' oreille que ſes *battemens* ſont plus fréquens , & qu' ils reſtent pour cela moins ſenſibles ; d' où il ſuit, que les accords conſonans doivent être préciſément ceux dont les vibrations ſont les plus concurrentes , & qu' au contraire les accords deviennent diſſonans , lorſque la concurrence des vibrations eſt telle, qu' elle peut aiſément être apperçue de l' oreille . Mr. Tartini tire auſſi de ſes expériences du troiſiéme ſon pluſieurs conſéquences pour la nature de l' Harmonie . Il prétend que le troiſiéme ſon eſt toujours la vraie baſſe dont les ſons particuliers ſont les deſſus ; & c' eſt ſur cela qu' il a principalement fondé ſon ſiſtème de Muſique. Quoique il en ſoit il eſt au moins certain par ce que venons de démontrer, que de quelque façon qu' on prenne la choſe, la concurrence des vibrations en eſt toujours le fondement, quoique préſenté ſous des points de vue différens ; nous verrons encore ci-après , que le Principe de l' Harmonie qu' on prétend trouver dans la nature même des corps ſonores revient encore a celui-ci.

Lorſ-

65. Lorſque les parties des corps ſonores ſont ébranlées, l' air reçoit autant d' impreſſions ſucceſſives, que ces parties font de vibrations, & ces impreſſions ſe répandent par tout ſans ſe multiplier, ou ſe troubler en paſſant d'une particule d' air dans l' autre. Donc ſi le corps ſonore eſt de telle nature, que les vibrations de ſes parties commencent toutes, & s' achèvent toujours dans le même tems, l' oreille ſera frappée à la fois par pluſieurs petits coups, qui ſe ſuccederont par des intervalles de tems égaux, & cette uniformité d' impreſſions produira ce ſentiment agréable qu' on appelle *Son*; au contraire ſi les vibrations des parties du corps ſonore différent les unes des autres, c' eſt a dire qu' elles ne ſoient pas toutes d' égale durée, notre organe recevra à chaque inſtant des ébanlemens différens, & on n' entendra dans ce cas qu'un bruit confus. Cette verité qui à été de long-tems réconnue eſt une ſuite néceſſaire de ce que l' on a démontré ſur les mouvemens des cordes vibrantes, & ſur ceux des fibres élaſtiques d'air; car on éprouve tous les jours que les cordes, qui produiſent les meilleurs ſons ſont toujours celles qui ont une plus grande uniformité dans toute leur éxtenſion, ce qui les rend plus capables des mouvemens réguliers, & iſocrones, que nous avons determiné dans le Chap. VII. Ainſi l' explication du ſon, & du bruit que quelques Auteurs ont voulu donner en diſant que tout bruit eſt *un*, & qu' au contraire tout ſon eſt *compoſé*, tombe ici d' elle même, puiſqu' elle eſt tout a fait oppoſée à ce que nous venons de démontrer.

Suppoſons a préſent, que pendant qu' une corde réſonne il y ait près d' elle pluſieurs autres cordes tendues, il eſt clair que l' air ébranlé par la premiére frappera toutes les autres, & que les impulſions reçues par celles-ci répondront parfaitement a chaqu'une des vibrations de celle qu' on

fait résonner ; donc a force de coups reiterés, elle devront de même entrer en vibration ; or puisque la durée des vibrations des cordes est absolument déterminée par la constitution de la corde même, il s' ensuit que si toutes les cordes sont de même nature, les vibrations naissantes de celles qui sont ébranlées par l' air pur, seront toujours favorisées par des impulsions continues qui procédent de la corde principale ; c' est pourquoi au bout d' un certain tems elles seront aussi forcées de résonner. Au contraire si les cordes sont telles, que leurs vibrations ne puissent jamais être concurrentes, elles seront tantôt favorisées, & tantôt troublées par les impulsions qui procédent de la corde principale, & ainsi il sera impossible, qu' elle reçoivent jamais un mouvement sensible, & capable de produire le le son qui leur est propre. Supposons à présent que les cordes tendues ne soient pas à l' unisson de celle qu' on fait résonner, mais qu' elles y répondent comme nombre à nombre, il faudra ici distinguer deux cas ; lorsque le son de la corde principale est mésuré exactement par ceux des autres cordes, & lorsque ces sons sont seulement commensurables entr' eux. Il est visible que dans le premier de ces cas, les vibrations des cordes qu' on laisse en repos, seront toujours favorisées par celles de la corde principale qu' on ébranle, & par conséquent ces cordes devront de même résonner comme si elles étoient à l' unisson ; dans l' autre cas les cordes ne pourront résonner dans leur totalité ; car elles seront toujours en partie troublées, & en partie favorisées par les vibrations de la principale ; & comme les impulsions contraires, & favorables sont toujours uniformes, elles les forceront de prendre des figures telles, que leurs vibrations puissent toujours être favorisées. Il faudra donc qu' elles se divisent en plusieurs ventres égaux, de sorte que le son de chacun

de

de ces ventres ſoit où à l'uniſſon de celui de la corde principale, où bien, qu'il le méſure toujours exactement comme dans le premier cas. Or puiſque il n'y a rien qui rétienne fixes les noeuds formés par les ventres naturels de ces cordes, il arrivera facilement que les vibrations particuliéres ſe dérangent les unes les autres, ce qui en détruira l'uniformité, & empêchera par conſéquent les cordes de réſonner; elle ne feront donc que frémir au ſon de la principale, & ſe diviſeront, en frémiſſant, par une eſpèce d'ondulation, comme on le voit dans les ſons harmoniques.

Ce Phénomène a été obſervé par Mrs. Wallis, & Merſenne les premiers, & puis par Mr. Sauveur dans la diſſertation citée (art. 50.). Tout le monde le reconnoit aujourd'hui; & on convient généralement, que l'air ébranlé par les oſcillations d'une corde eſt celui qui met les autres en mouvement, mais il reſtoit encore à donner la raiſon pourquoi, de pluſieurs cordes frappées également par les mêmes coups d'air il n'y a que les harmoniques qui puiſſent réſonner, où frémir ſimplement. C'eſt a quoi il me paroit d'avoir entiérement ſatisfait par tout ce qui a été démontré juſqu'à préſent.

Je ſouhaiterois pouvoir expliquer de même la multiplicité des ſons harmoniques, qui ſe font ſentir en frappant une ſeule corde, tels que la douxiéme, & la dixſeptiéme, au deſſus du ſon principal. Mais j'avoue qu'après bien de réflexions, je ne ſuis pas encore parvenu a trouver ſur ce ſujet rien de ſatisfaiſant. Ayant examiné avec toute l'attention dont je ſuis capable, les oſcillations des cordes tendues, je les ai toujours trouvé ſimples, & uniques dans toute leur étendue, d'où il me paroit impoſſible de conçevoir comment divers tons peuvent être engendrés à la fois. Il feroit pour cela inutile de recourrir aux théo-

ries

ries dont on à fait mention (art. 63.) puiſque nous en avons deja fait ſentir le défaut . Je ſuis donc enclin a croire que ces ſons peuvent être produits par d' autres corps qui réſonnent au bruit du ſon principal , comme ont vient de le voir dans les cordes ; & ce qui peut donner quelque poid à cette conjéćture, c' eſt que ce mélange de ſons harmonieux n' eſt guère ſenſible, que dans les Clavecins, ou dans les autres inſtrumens montés de pluſieurs cordes.

Quoique il en ſoit je déſirerois que des perſonnes dont l' oreille fût extrèmement fine , & qui ne l' euſſent pas beaucoup exercé a entendre de la Muſique, vouluſſent bien ſe prendre la peine de répéter ces expériences ſur une ſeule corde fixée par deux chevalets ſur une ſimple table, dans des lieux ouverts de toute part ; dans ce cas l' on pourroit être ſûr, que ni la prévention de l' oreille acoutumée a entendre toujours les ſons principaux accompagnés de leurs harmoniques, ni la réſonnance des corps circonvoiſins ne pourroit y avoir aucune part ; & le réſultat de l' expérience déviendroit hors de toute atteinte.

Mr. Rameau, un de plus célèbres Artiſtes de nos jours, & a qui l' art Muſical eſt ſi redevable, à donné en 1750. une démonſtration du Principe de l' Harmonie fondée ſur les expériences rapportées de la réſonnance des corps ſonores . Cet Auteur croit avoir ainſi découvert dans la nature même les vrais fondemens de l' Harmonie, qu' on avoit avant lui inutilement cherché par d' autres voies ; mais après tout ce que nous venons de démontrer on voit évidemment que ce Principe même tire ſon origine de celui de la concurrence des vibrations, Principe dès longtems réconnu pour la ſource des conſonnances, & des diſſonances ; & ſur lequel Mr. Euler à établi ſa nouvelle théorie de Muſique dans le Traite cité (art. 52.)

Ce célèbre Géomètre à donné en effet à ce principe toute l'étendue, dont il paroit capable, & il à tâché par là de ramener a des formules assés simples, les principales règles de la Composition. L'on ne doit donc plus regarder le principe de Mr. Rameau que comme une nouvelle preuve de celui-ci tirée immédiatement de l'expérience; mais cet Auteur aura toujours le mérite d'avoir sçu en déduire avec une extrême simplicité la plupart des loix de l'Harmonie que plusieurs expériences détachées, & aveugles avoient fait connoître.

Au reste quelque principe qu'on adopte pour developper la nature des consonances, & des dissonances il réstera toujours a expliquer pourquoi il n'y a d'autres rapports primitifs consonans que ceux qui sont contenus dans les nombres 1, 3, 5; car il est certain qu'une corde qui sera la septiéme partie, où bien septule d'une autre devra résonner dans le premier cas, & frémir seulement dans le second tout de même comme si elle rendoit une douxiéme, ou une diseptiéme, d'où il s'ensuit, que suivant même le Principe de Mr. Rameau on devroit regarder le rapport de 4 : 7., où bien de 7 : 8 pour consonans, ce qui est néanmoins dementi par l'expérience. Mais ce qui est plus étonnant c'est, que le rapport de 8 : 9 qui constitue une seconde majeure, est beaucoup moins dissonant que celui de 7 : 8, quoique les concurrences soient plus fréquentes dans celui-ci, que dans l'autre. Il y a la même question à faire sur plusieurs accords, qui ne sont pas reçus dans l'Harmonie, quoique ils contiennent moins de dissonances que d'autres, qu'on emploie avec succès. Je crois, que dans quelque sistème de Musique, que l'on veuille imaginer, l'on ne pourra éluder ces difficultés qu'en recourant au gout, & au sentiment commun sur lesquels l'habitude, & les préjugés ont peut être beaucoup plus de pou-

pouvoir, qu'on ne le penſe ordinairement. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'entrer dans des telles diſcuſſions. Le ſavant Mr. D'Alembert en a traité fort au long dans l'Article *fondamental* de l'Encyclopédie, auquel nous nous conterons de renvojer.

REFLEXIONS

SUR LES QUANTITES IMAGINAIRES

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

1. On rencontre ſi ſouvent des quantités imaginaires dans les expreſſions algébriques qu'il ſeroit à ſouhaiter qu'on ſe fut attaché à en examiner avec plus de ſoin la nature & l'origine. Ces recherches auroient été d'un grand ſecours dans toutes les parties de Mathématiques qu'on traite par le calcul, & on auroit évité par là beaucoup de paradoxes & de contradictions dans une Science qui en devroit être entiérement exempte. La nature du calcul introduit en effet preſque toujours dans la ſolution d'une queſtion, des cas qui lui ſont étrangers, & le problême alors quoique poſſible conduit à des équations, dont pluſieurs racines peuvent être imaginaires: ſouvent même une formule qui paroiſſoit devoir ſatisfaire entiérement à la queſtion, nous la préſente dans certaines circonſtances d'une façon abſurde & impoſſible: nous en verrons des exemples frappans dans la ſuite. Du reſte le premier cas n'a d'autre inconvénient que la difficulté de débaraſſer l'équation de ces valeurs imaginaires; mais dans le ſecond on pourroit facilement être induit en erreur par ces formules, & regarder comme impoſſible une queſtion, dont toute la contradiction conſiſte dans la maniére, dont on l'exprime algébriquement.

Souvent au contraire, parcequ'on ne peut faire entrer dans l'expreſſion analytique d'un problême toutes les conditions qui lui appartiennent, l'algèbre nous en fournit une ſolution réelle pour des cas où ces conditions le rendent impoſſible. J'en pourrois apporter beaucoup d'exemples;

mais cette matiére d'ailleurs étrangère à mon sujet, ayant été suffisamment traitée par d'autres, & particuliérement par Mr. D'Alembert dans l'Encyclopédie à l'article *Equation*, où l'on trouvera des réflexions neuves & intéressantes, je passe à examiner avec plus de soin l'origine des racines imaginaires qu'on trouve dans les équations élevées.

2. Il est d'abord évident que si toutes ces racines sont imaginaires, le problême implique contradiction: mais s'il s'en trouve des réelles & des imaginaires, la question sera-t-elle en même tems possible & contradictoire? éclaircissons ceci par un exemple, Qu'on se propose de trouver deux moyennes proportionelles x & y entre les quantités a & b données; les deux équations $x^2 = ay$, & $xb = y^2$ donneront en substituant dans la seconde la valeur de x prise dans la premiére $y = \pm \sqrt{(b \times \pm \sqrt{ay})}$, où l'on voit que l'ambiguité des signes de $\pm \sqrt{ay}$ entraine dans la formule deux valeurs imaginaires pour y exprimées par $y = \pm \sqrt{(b \times - \sqrt{ay})}$. Ces valeurs de y répondroient au cas où x seroit négatif, circonstance qui rendroit en effet le problême impossible.

Or comme en chassant les radicaux l'ambiguité des signes évanouit, il est nécessaire que l'équation réduite contienne les deux cas de x positive & négative, & donne par conséquent des racines réelles & imaginaires pour y satisfaire également. Voilà de quelle maniére la même équation appartient en même tems à un problême possible & à un impossible.

En suivant le même procédé on pourroit presque toujours reconnoître (principalement dans les problêmes géométriques) quelles sont les questions qu'on résoud malgré soi avec celle qu'on a en vuë, & on se persuaderoit aisément que puisqu'on n'introduit plusieurs valeurs pour l'inconnue dans l'équation finale que par la multiplication & l'élévation aux puissances, on pourroit de même

com-

combiner de telle façon les opérations inverſes qu'on trouva à part chaque valeur de x, qui devroit par conſéquent toujours avoir une expreſſion finie réelle, ou imaginaire.

3. Pour mettre hors de doute cette vérité qui a toujours été ſuppoſée par tous les Algébriſtes, Mr. de Bougainville dans ſon Introduction au calcul intégral, s'eſt ſervi de la conſidération d'une courbe; mais la démonſtration qu'il en tire ne me paroit ni naturelle, ni aſſès rigoureuſe: puiſque la valeur imaginaire qu'il trouve par cette méthode n'étant qu'approchée, on pourroit ſoupçonner que la quantité que l'on néglige, quelque petite qu'elle ſoit, ne fût préciſément celle qui empêcheroit qu'on ne pût exprimer l'inconnue par une expreſſion finie: & l'on eſt d'autant plus porté à former ce doute, que comme il l'a lui même fait voir d'après Mr. D'Alembert, il arrive ſouvent qu'un terme qu'on croyoit pouvoir négliger dans une ſérie, eſt cependant celui qui la fait changer de nature.

Quoiqu'il en ſoit, cette propoſition, qui comme on l'a vu, paroit être une ſuite du procédé qui nous conduit aux équations de dégré élevé, ſuffiroit pour démontrer ce théorème fameux: qu'une équation quelconque peut toujours être diviſée en facteurs réels du ſecond dégré; car il s'en ſuivroit que quelque compliquée que fût une racine quelconque de cette équation, il ne s'agiroit toujours que de diviſions ou d'extractions de racines. Or dans tous ces cas on pourra toujours par une ſimple conſtruction géométrique réduire cette expreſſion à la forme $A + B\sqrt{-1}$, où A & B ſont des quantités réelles (voyés l'article 5.): d'où il ſuit que puiſque toute équation qui conduit à $x = A + B\sqrt{-1}$ doit donner également $x = A - B\sqrt{-1}$ (étant arbitraire de prendre les radicaux quarrés avec le ſigne + ou −) l'équation propoſée ſera diviſible par $x - A \pm B\sqrt{-1}$, & aura par conſéquent encor pour facteur le produit réel $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$.

 4. L'im-

4. L'importance de ce théorème exigeroit cependant qu'on en eut une démonſtration rigoureuſe, tirée de la nature même des équations: d'autant plus qu'on mettroit en même tems hors d'atteinte la propoſition de l'art. 3. Tel eſt le plan qu'a ſuivi Mr. Euler dans une excellente piéce qu'il a donné ſur cette matiére dans les Mémoires de l'Académie Royale de Pruſſe de l'année 1749. Voici la route qu'il a tenu. Qu'on réduiſe toutes les équations au dégré 2^n ce qui eſt facile par la multiplication: cela fait il eſt évident qu'il ſuffiroit de démontrer généralement qu'une équation du dégré 2^n eſt toujours diviſible réellement en deux autres du dégré 2^{n-1}; car par la même raiſon chacune de celles-ci ſe diviſeroit en deux autres du dégré 2^{n-2}, & en ſuivant ce raiſonnement on auroit cette équation diviſée en 2^{n-1} facteurs du ſecond dégré. Pour démontrer donc cette propoſition, après avoir fait évanouir le ſecond terme de l'équation, qui devient par là

$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + \&c.$ où les coéficiens B, C, D &c. ſont en nombre $2^n - 1$, qu'on ſuppoſe que les deux facteurs cherchés, ſoient

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \&c.$$

$$\& \; x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \mu x^{2^{n-1}-2} + \nu x^{2^{n-1}-3} + \&c.$$

où le nombre des coéficiens indéterminés eſt encore $2^n - 1$. La comparaiſon du produit de ces deux équations avec la propoſée fournit autant d'égalités, de façon que toutes les lettres α, β, μ, ν &c. ſe pourront déterminer par les connues B, C, D &c. mêlées avec l'indéterminée u, réellement ſans extraction de racine, ce qui donnera une équation pour u, dont l'expoſant ſera, comme on le ſait par

les

les combinaiſons $\frac{2^n \times 2^n - 1 \times 2^n - 2 \times 2^n - 3 \ldots \times 2^{n-1} + 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \ldots \ldots 2^{n-1}}$ nombre que l' Auteur démontre pairement impair. De ce que le ſecond terme manque dans l' équation, il conclut qu'une racine quelconque p aura toujours ſa compagne $-p$, d'où il infère encore qu'on aura généralement pour facteur de cette équation $u^2 - p^2$: donc puiſque le nombre des racines eſt pairement impair, le nombre de ces facteurs doubles ſera impair, & par conſéquent, dit-il, le dernier terme de cette équation ſera négatif, ce qui ſuffiroit pour démontrer que u aura au moins deux valeurs réelles, ce qui rendroit auſſi réels tous les coéficiens α, β, μ, ν *&c.*

A l'égard de ce qu'on a dit qu'une racine p exige dans cette équation la $-p$, il ne paroit pas qu'on en puiſſe douter, puiſque l'équation qui détermine u n'appartenant pas plus à la premiére qu'à la ſeconde des équations ſuppoſées, elle doit fournir indifféremment la valeur de $+u$ & de $-u$: d'où il eſt évident non ſeulement que le ſecond terme manquera dans cette équation, mais auſſi tous les termes pairs. Mais puiſque p, p', p'', p''' *&c.* ſont les racines de l' équation, dont quelques unes peuvent étre imaginaires, & avoir un quarré négatif, on ne peut pas conclure de ce que les facteurs $u^2 - p^2$ ſont en nombre impair, que le dernier terme de leur produit ſoit eſſentiellement négatif. Il faudroit avant tout avoir démontré que le produit $p p' p'' p'''$ *&c.* de toutes les racines poſitives doit toujours être réel, Mr. Euler le trouve en effet tel pour les équations du quatriéme dégré; mais pour les autres cas il ſe contente de dire que ce produit étant déterminable par les coéficiens C, D, E il ne peut être imaginaire. On ſent bien qu' il faudroit encor qu'on fut aſſûré qu'il eſt égal à une fonction rationelle de ces coéficiens. Cette circonſtance, ſans laquelle le théorème ci-deſſus perd toute ſa force, me paroit aſſés difficile à démontrer. Pour cela cepen-

dant

dant je m' étois d' abord assûré que les racines de l'équation étant p, p', p'', p''' &c. il suffisoit de faire voir que si entre les combinaisons qu' on peut faire en prenant 2^{m-1} de ce quantités ensemble, on choisissoit seulement celles où entroit p, & qu' on les multiplia ensemble, cela donneroit exactement le produit $p p' p'' p'''$ &c.; mais quoique ces produits se présentassent d' abord selon une loi assés simple, la difficulté que j'ai trouvé à les déduire généralement des coéficiens de l' équation proposée m' a fait abandonner cette recherche, pour examiner si indépendamment des Principes que Mr. Euler avoit déja établi, on ne pourroit point démontrer la proposition en question.

5. Si on a une équation quelconque du second dégré $x^2 + Ax + B = 0$, dans laquelle A & B soient des quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, je dis que ses racines seront aussi de la forme $c + d\sqrt{-1}$, a, b, c, d étant des quantités réelles. Qu'on résolve l' équation proposée, on trouvera $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(-B + \frac{A^2}{4})}$: il est d'abord évident qu'on pourra réduire cette équation à $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$, g & h étant toujours des quantités réelles: on voit de plus que pour donner à cette expression la forme cherchée $c + d\sqrt{-1}$, il suffiroit d'y réduire le radical composé $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$. Pour cela dans un cercle, dont le rayon soit égal à $\sqrt{(g^2 + h^2)}$ qu'on cherche un angle φ, dont le sinus $= h$, & le cosinus $= g$, ce qu'il est facile de faire au moyen des tables. Le radical $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$ se changera ainsi en $\sqrt{(cos.\,\varphi + sin.\,\varphi\sqrt{-1})}$ qui est égal à $cos.\,\frac{\varphi}{2} + sin.\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}$ ce que je prouve de la maniére suivante. Que φ & θ représentent deux angles quelconques si l'on multi-

multiplie $cof.\ \varphi + fin.\ \varphi \sqrt{-1}$ par $cof.\ \theta + fin.\ \theta \sqrt{-1}$, on trouvera pour produit $cof.\ \varphi \times cof.\ \theta + cof.\ \theta \times fin.\ \varphi \sqrt{-1} + cof.\ \varphi \times fin.\ \theta \sqrt{-1} - fin.\ \varphi \times fin.\ \theta$, ou bien $cof.\ \varphi \times cof.\ \theta - fin.\ \varphi \times fin.\ \theta + (cof.\ \theta \times fin.\ \varphi + cof.\ \varphi \times fin.\ \theta) \sqrt{-1}$. Or l'on fait par les Principes de la trigonométrie que $cof.\ \varphi \times cof.\ \theta - fin.\ \varphi \times fin.\ \theta = cof.\ (\varphi + \theta)$, & que $cof.\ \theta \times fin.\ \varphi + cof.\ \varphi \times fin.\ \theta = fin.\ (\varphi + \theta)$, on aura donc $(cof.\ \varphi + fin.\ \varphi \sqrt{-1}) \times (cof.\ \theta + fin.\ \theta \sqrt{-1}) = cof.\ (\varphi + \theta) + fin.\ (\varphi + \theta) \sqrt{-1}$. Si à préfent on fait $\theta = \varphi$ la formule fe réduira à $(cof.\ \varphi + fin.\ \varphi \sqrt{-1})^2 = cof.\ 2\varphi + fin.\ 2\varphi \sqrt{-1}$, d'où il fuit évidemment que $\sqrt{(cof.\ \varphi + fin.\ \varphi \sqrt{-1})} = cof.\ \frac{\varphi}{2} + fin.\ \frac{\varphi}{2} \sqrt{-1}$, puifqu'en élevant les deux membres au quarré no a $cof.\ \varphi + fin.\ \varphi \sqrt{-1} = cof.\ \frac{2\varphi}{2} + fin.\ \frac{2\varphi}{2} \sqrt{-1}$ équation identique. Si je prens donc $m = cof.\ \frac{\varphi}{2}$ & $n = fin.\ \frac{\varphi}{2}$ j'aurai par la fubftitution $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})} = m + n\sqrt{-1}$: expreffion qui ajoûtée, ou levée de la quantité $\frac{A}{2}$ donnera $x = c + d\sqrt{-1}$, comme on s'étoit propofé. Cette propofition préparatoire à la principale que nous avons en vue pouvoit fe déduire directement du théorème général démontré par Mrs. D'Alembert, & Euler; mais comme ils l'ont tiré du calcul différentiel, j'ai cru devoir en donner ici une démonftration plus fimple, afin qu'une propofition qui appartient entiérement à l'algébre pure ne tint en aucune façon à des Principes tranfcendans, & ne dépendit que de la fimple Géométrie.

Ce lemme pofé: foit une équation d'un dégré quelconque r, dont on veuille trouver les facteurs trinomes. Qu'on réfolve le nombre r en fes facteurs fimples, & on aura

$r =$

$r = 2^m. p. q. r. f.$ &c. où les nombres p, q, r, f, &c. feront des nombres premiers, & par conféquent impairs. Donc le produit $p. q. r. f.$ &c. fera un nombre impair que je nomme P.

Qu'on divife à préfent l'équation propofée par une équation du fecond degré dont le coéficient du fecond terme, foit la lettre indéterminée u, & par les régles connues d'algébre on aura une nouvelle équation, où u fera déterminée par les coéficiens de la donnée, & puifque u doit pouvoir repréfenter toutes les combinaifons poffibles des racines de la premiére équation prifes deux à deux, on verra facilement par la théorie des combinaifons, que cette équation fera du degré $\frac{2^m. P. (2^m. P - 1)}{2} = 2^{m.-1} P. (2.^m P - 1)$ fi donc $m = 1$, cette équation fera d'un dégré impair, & aura par conféquent une racine réelle. Que fi m eft plus grand que l'unité qu'on divife de nouveau cette équation par une autre du fecond dégré dont le coéficient du fecond terme foit u'', & qu'on faffe pour abréger $2^m. P - 1$ qui eft un nombre impair $= P^1$; par les mêmes raifons, que ci-devant la lettre u' fera donnée par une équation dont l'expofant fera exprimé par $\frac{2^{m.-1} P. P^1. (2^{m.-1} P. P^1. - 1)}{2} = 2^{m.-2} P. P^1. (2^{m.-1} P. P^1 - 2)$

Dans le cas de $m = 2$ cette équation fera de dégré impair & aura comme on fait une racine réelle. Si enfin m étoit encore plus grand que 2 on n'auroit qu'a pourfuivre le calcul, & il eft évident que la m^{me} équation devra être d'un dégré impair.

On aura donc les équations fuivantes.

$$z^2 + uz + M = 0$$
$$u^2 + u'u + M^1 = 0$$
$$u'^2 + u''u' + M^{11} = 0$$
$$u''^2 + u'''u'' + M^{111} = 0$$

&c. &c. &c.

et

Et la derniére équation sera telle que son dernier terme, & le coéficient du second seront réels ; puisque ce coéficient sera la racine réelle de l'équation m^{me} qui est comme on l'a vû de dégré impair (*), & que le dernier terme est encor, comme on le sait, déterminable par ce coéficient, & par ceux de l'équation donnée sans extraction de racine : si donc on prend une des racines de cette équation elle aura la forme $m + n\sqrt{-1}$, & sera le coéficient du second terme de l'équation qui la précéde, dont le dernier terme se tirera de même par de pures préparations algébriques, de ce coéficient & des données de la premiére formule, & les racines de cette nouvelle équation seront donc de nouveau de la forme $p + q\sqrt{-1}$. En poursuivant la même opération on arrivera finalement à la premiére $z^2 + uz + M$, par laquelle on a divisé la proposée, & par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait pour les autres, on verra que u & M auront la forme $r + s\sqrt{-1}$: par conséquent si on résoud cette équation, ses racines auront encore la forme $A + B\sqrt{-1}$: d'où il suit, que $z - A - B\sqrt{-1}$ sera un diviseur exact de l'équation donnée. Or en substituant dans celle-ci $A + B\sqrt{-1}$ au lieu de z, on trouve pour déterminer B une équation dont tous les termes impairs manquent, ce qui fait connoître que cette équation sera également divisible par $z - A + B\sqrt{-1}$ elle le sera donc aussi par le produit de ces deux racines, qui est le trinome réel $z^2 - 2Az + B^2 + A^2$.

(*) Comme cette proposition, qu'une équation de dégré impair a toujours une racine réelle, est déduite communément dans les livres d'algébre de la supposition que les racines imaginaires se trouvent toujours deux à deux dans les équations : pour ne pas paroitre tomber dans une cercle vicieux, je remarquerai ici qu'on peut aisément la démontrer indépendemment de cette supposition : car si on substitue pour l'inconnue dans une équation impaire, premiérement $+\infty$, & puis $-\infty$, il est évident que toute la formule déviendra dans le premier cas $= \infty$, & dans le second $= -\infty$ d'où il suit qu'il y a toujours une quantité finie & réelle, qui substituée pour l'inconnue dans l'équation, la rendra $= 0$: c'est à dire que cette équation aura au moins une racine réelle.

Quoique cette propoſition très remarquable dans l'Analyſe, ait été maniée par les plus grands Géomètres de notre tems, elle n' a pas, que je ſache, été démontrée juſqu'à préſent d'une maniére rigoureuſe, & ſatisfaiſante. Au reſte la démonſtration que je viens d'en donner a cet avantage, qu' elle n' eſt fondée que ſur la pure théorie des équations.

Il faut avouer cependant que dans les équations élevées ce procédé dévenant impraticable, on ne peut par cette méthode trouver actuellement ces facteurs: il ſeroit à ſouhaiter que les differens procedés qu' à tenté, pour cela le *R.P.* Le Seur (dans un mémoire ſur le calcul intégral imprimé à Rome l'année 1748, où l'on obſerve, d' ailleurs une excellente conduite de calcul) fuſſent moins compliqués, & doüés d' un plus grand dégré de généralité; car quoique la longueur du calcul l' ait déja fait échouer dès le huitiéme dégré dans l'application qu' il a voulu en faire, ſans qu' il ait même put faire voir dans ce cas particulier la vérité de la propoſition que je viens de démontrer généralement, il paroit cependant qu' en ſimplifiant cette méthode on pourroit s' en ſervir avec ſuccès. C' eſt là une matiére que je me reſerve d' examiner une autre fois, avec la théorie & la réſolution générale des équations qui lui eſt intimément liée. Mais retournons aux quantités imaginaires conſiderées comme des derniers réſultats.

6. Si l' on réflechit ſur la nature des racines imaginaires, qui comme on ſait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu' elles ne doivent point avoir de conſtruction Géomètrique poſſible, puiſqu' il n'eſt point de maniére de les conſidérer, qui lève la contradiction qui ſe trouve entres les données immuables par elles mêmes.

Cependant pour conſerver une certaine analogie avec les quantités négatives, un Auteur dont nous avons un cours d'algébre d'ailleurs fort eſtimable a prétendu les dé-

voir

voir prendre ſur une ligne perpendiculaire à celle où l'on les avoit ſuppoſé, ſi par exemple (pl. 1. Fig. 1) on devoit couper la ligne $AB = 2a$ de façon que le rectangle des parties $x \times (2a - x)$, fut égal à la quantité $2a^2$ on trouveroit $x = a \pm \sqrt{(-a^2)}$, pour trouver donc cette valeur de x, qu'on prenne ſur la ligne AB, la partie $AC = a$ partie réelle de la valeur de x, & ſur la perpendiculaire ED les CE, CD auſſi $= a$, on aura les points D, E qui reſolvent le problême en ce que $AD \times DB$, ou $AE \times EB = 2a$, mais puiſque les points E, & D ſont pris hors de la ligne AB, & qu' une infinité d' autres points pris de même, auroient auſſi une propriété ſemblable, il eſt viſible, que ſi cette conſtruction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait abſolument rien connoître, c'eſt cependant là un des cas ou elle pourroit paroître plus ſpécieuſe, car le plus ſouvent on ne voit abſolument pas comment le point trouvé pourroit réſoudre la queſtion, quelques changemens qu'on ſe permit dans l' énoncé du problême.

Les racines imaginaires n'admettent donc pas une conſtruction géomètrique, & on ne peut en tirer aucun avantage dans la réſolution des problêmes: on devroit par conſéquent s'attacher à les écarter autant qu'il eſt poſſible des équations finales, puiſque priſes dans quel ſens que ce ſoit, elles ne peuvent pas réſoudre la queſtion, comme les racines négatives, dont toute la contradiction conſiſte dans leur maniére d'être à l' égard des poſitives.

7. De cette conſidération il paroit qu'on peut conclure que les logaritmes des quantités négatives, qui ne ſont que l'expreſſion de leur rapport avec les poſitives, doivent être impoſſibles ou imaginaires. C'étoit le ſentiment de M. Leibnits, qui l'a ſoutenu vivement contre M. Bernoulli. Il fondoit ſon opinion ſur la nature des logaritmes, en diſant que ſi l'on ſuppoſe que o ſoit le logaritme de 1, & 1 celui de 2 il eſt évident que x pouvant repréſenter un

nombre quelconque entier rompu positif ou négatif, 2^x devra être l'expression générale d'un nombre quelconque dont le logaritme sera x: or l'on voit qu'aucune valeur possible de x ne peut rendre le nombre 2^x négatif, & que par conséquent il n'y a point de logaritme d'un nombre négatif. Ce qu'on doit admettre d'autant plus volontiers, qu'autrement il s'en suivroit une absurdité ; c'est à dire qu'une quantité imaginaire auroit un logaritme réel, car si $+2$ avoit un logaritme n, $\sqrt{-2}$ devroit aussi avoir $\frac{n}{2}$ pour logaritme.

Cependant Mr. Bernoulli disoit que puisque $\frac{1}{2}\, l.\, 4 = l.\sqrt{4}$, & que $\sqrt{4}$ est également $+2$ & -2, on en doit conclure que le nombre négatif -2 a absolument le même logaritme que 2. Quand aux raisons de Mr. Leibnits il y répondoit, que quoique les nombres négatifs ne formassent pas une suite avec les nombres positifs, cela n'empêchoit pas qu'ils n'en formassent une à part, dont -1 seroit le premier terme. Qu'au reste $l.\sqrt{2} = \frac{1}{2}\, l.\, 2$ seulement parceque $\sqrt{2}$ est moyen proportionel entre 1 & 2; mais qu'il n'est pas vrai que $l.\sqrt{-2} = \frac{1}{2}\, l. -2$, puisque $\sqrt{-2}$ n'est pas moyen entre -2 & -1.

Outre les raisons que nous venons d'alléguer, Mr. Bernoulli déduisoit immédiatement son sentiment de la continuité de l'hyperbole ; mais comme Mr. Euler a établi sur des calculs neufs & très ingénieux, un troisiéme sentiment qui concilie toutes les difficultés que nous venons d'exposer, je ne parlerai de cette nouvelle preuve de Mr. Bernoulli, à laquelle le célèbre Géomètre que je viens de citer n'a pas touché, qu'après avoir fait connoître son procédé en peu de mots.

8. On

8. On ſait que pour les logaritmes hyperboliques, ſi ω eſt infiniment petit, $l.\,(1+\omega)=\omega$, $l.\,(1+\omega)^2=2\omega$, & généralement $l.\,(1+\omega)^n=n\,\omega$, d'où l'on voit, que ſi l'on veut le logaritme fini y d'un nombre x, on aura $y=n\,\omega$, & $x=(1+\omega)^n$, ou bien $x^{\frac{1}{n}}=1+\omega$, ce qui donne $\omega=x^{\frac{1}{n}}-1$, le nombre n devant néceſſairement être infini dans ce cas: ſi l'on met dans l'équation $y=n\;\omega$, la valeur trouvée de ω, on aura $y=n\,x^{\frac{1}{n}}-n=l.\,x$: or puiſque $n=\infty$, $x^{\frac{1}{n}}$ aura une infinité de valeurs qui fourniront une infinité de logaritmes pour le nombre x.

Pour les trouver plus commodément j'obſerve que, puiſque $x=1\times x$, ſi je nomme X le logaritme tabulaire de x j'aurai $l.\,x=l.\,1+X$. Je cherche donc tous les logaritmes de l'unité en ſubſtituant 1 pour x dans la formule qui dévient $n\,(1^{\frac{1}{n}}-1)=y$, ou bien $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Or ſi π exprime l'Arc de 180 dégré d'un cercle, dont le rayon $=1$, & λ un nombre quelconque entier, on ſait par le théorème de Mr. Cottes que cette équation réſoluë en ſes facteurs, donnera généralement $1+\frac{y}{n}=$ $cof.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\pm fin.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$; mais parceque $n=\infty$, l'Arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ ſera infiniment petit; ce qui change la formule en $1+\frac{y}{n}=1\pm\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, & donne finalement $y=\pm\,2\,\lambda\,\pi\sqrt{-1}$.

Tous

Tous les logaritmes de $+1$ seront donc o, $2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, $6\pi\sqrt{-1}$ &c. On trouvera de même tous les logaritmes de -1, en prenant de la même maniére tous les facteurs de $(1+\frac{y}{n})^n + 1 = 0$ qui donnent généralement $1+\frac{y}{n} = cos.\frac{2\lambda-1}{n}\pi \pm fin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi\sqrt{-1}$; les logaritmes de -1 seront donc parceque $n = \infty$ $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$ &c.

Pour trouver enfin tous les logaritmes d'une quantité imaginaire quelconque $a+b\sqrt{-1}$, notre illustre Auteur fait $\sqrt{(a^2+b^2)} = c$, & $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ seront le sinus & le cosinus d'un angle φ facile à trouver par les tables; & la quantité imaginaire se changera en $c(cos.\varphi + fin.\varphi\sqrt{-1})$ dans un cercle, dont le rayon $= 1$: & si C est le logaritme de c, on aura $l.(a+b\sqrt{-1}) = C + l.(cof.\varphi + \sqrt{-1}\ fin.\varphi)$, il suffira donc de trouver tous les logaritmes de $cof.\varphi + fin.\varphi\sqrt{-1}$; pour cela j'observe que (*)

$$cof.\varphi + fin.\varphi\sqrt{-1} = (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})^n$$

tout se réduit donc à trouver les facteurs de

$$(1+\frac{y}{n})^n - (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})^n = 0 \text{ qui donnent}$$

$$1+\frac{y}{n} = (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})(cof.\frac{2\lambda\pi}{n} \pm fin.\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1},)$$

d'où l'on tire par les raisons précédentes $y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$; tous les logaritmes de $a+b\sqrt{-1}$ seront donc $c+\varphi\sqrt{-1}$, $c+(\varphi\pm 2\pi)\sqrt{-1}$, $c+(\varphi\pm 6\pi)\sqrt{-1}$ &c.

On

(*) Mr. Euler démontre ceci dans la dissertation citée en faisant voir que cette puissance développée donne la même série infinie qu'on trouve en exprimant $cof.\varphi + fin\ \varphi\sqrt{-1}$ en φ par les suites connues; mais on peut tirer cette conclusion avec plus de facilité en généralisant la formule de l'art. 5. comme on peut le voir dans le premier tôme de l'Ouvrage de cet Auteur intitulé *Introductio in Analysin infinitorum*; Cap. VIII.

On voit non ſeulement que tous les logaritmes des nombres négatifs ſont imaginaires, comme Mr. Leibnits l'avoit penſé, mais on a une méthode facile pour en trouver un auſſi grand nombre qu'on voudra, & l'on s'apercevra aiſément du parfait accord de cette théorie avec les opérations que demande l'idée des logaritmes, & je renvois pour cela à l'excellent Mémoire que j'ai cité, où Mr. Euler fait voir comment

$$2\,l.-a = 2\,l.\,a\,,\ 2\,l.\sqrt{-1} = l.-1,\ 3\,l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l.\,1\ \&c$$

ce qui réſoud toutes les difficultés, & les raiſons que Mr. Bernoulli oppoſoit à Mr. Leibnits. Il ſemble donc que tous les doutes ſont entiérement levés; & Mr. Euler ſe flatte que Mr. Bernoulli même ne ſe ſeroit pas refuſé à ſes raiſons.

9. Cependant nous trouvons dans les lettres de ce grand Géomètre une preuve qu'il regardoit comme invincible, pour établir les logaritmes des nombres négatifs; à laquelle les calculs précédens ne paroiſſent porter aucune atteinte, & dont Mr. Euler n'a pas même fait mention; il la tiroit comme nous l'avons dit plus haut de la quadrature de l'hyperbole, de la maniére ſuivante.

Soit (Pl. 1. Fig. 2.) l'hyperbole PQG avec l'oppoſée pqg entre les aſſimptotes perpendiculaires Rr, OX; ſi on conſidère le point R comme fixe, & qu'après avoir tiré les ordonnées RP, SQ, EG; rp, $ſq$, eg, on prenne les SF, EH proportionelles aux aires PS, PE, il eſt évident que la courbe $RFHO$ ſera la logaritmique, dont QX ſera l'aſſimptote.

Mais ſi l'on ſuppoſe que le point S après avoir paſſé en T arrive en e (car rien n'empéche qu'on ne puiſſe faire cette ſuppoſition) on voit que l'aire hyperbolique qui répondra à ce point ſera en partie affirmative infinie TP, & en partie négative Tg, c'eſt à dire $TP - Tg$, & ſi

Te

$Te = TE$ l'aire qui répondra à cette abſciſſe ſera $= PE$, donc on aura une nouvelle appliquée $eh = EH$, ce qui donne une branche pour la logaritmique au deſſous de l'axe: indépandemment de la preuve qu' en vouloit tirer Mr. Bernoulli, de ce que $\frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$: raiſon que Mr. Euler a fait voir n'être pas concluante: & ces deux branches ſeront liées à l'infini, tout comme le ſont les branches de l' hyperbole (*).

La contradiction de ce réſultat avec les calculs inconteſtables de Mr. Euler, ſembloit faire douter de quelque équivoque dans le raiſonnement; cependant Mr. de la Grange de l'Académie de Berlin qui avoit auſſi été frappé de cette différence m'a bien voulu communiquer les réflexions qu' il avoit fait autrefois ſur ce ſujet; j' examinerai ici de nouveau, ſelon les vues qu'il s' étoit formé, l' origine des logaritmes hyperboliques.

10. Soit donc (Pl. 2. Fig. 3.) l'hyperbole LAP dont le centre eſt C, CX, CN les aſſimptotes, & CA le demidiamétre: ſoit l'ordonnée quelconque $PM = y$ & l'abſciſſe $CM = x$ le demidiamètre $CA = r$ on fait que $y = \surd(x^2 - r^2)$, & que par conſéquent $y = \surd -1 \times \surd(r^2 - x^2)$. Si à préſent

(*) Mr. Bernoulli après avoir conſidéré l'eſpace OTR comme poſitif prend pour négatif l' eſpace XTr, quoiqu'ils paroiſſent devoir être du même ſigne, puiſqu'ils ſont oppoſés au ſommet. Pour lever cette difficulté, on peut arriver à la même concluſion de la maniére ſuivante. Qu'on réfléchiſſe que les aires hyperboliques, ne ſont les logaritmes des abſciſſes que parceque ſi l' on prend celles-ci en progreſſion géométrique, les aires formeront une progreſſion aritmétique: ainſi l' aire $OTRP$, peut être le logaritme de TR, & $OTSQ$ le logaritme de TS &c., mais ſi l'on prend TR pour l'unité affirmative, & qu'on veuille que ſon logaritme ſoit o, il faudra toujours ſouſtraire des aires correſpondantes aux abſciſſes dont on veut le logaritme, toute l'aire $OTRP$, & le logaritme de TS, par exemple, ſera alors $-PQRS$: en effet TS étant plus petite que l' unité, ſon logaritme doit être négatif: en continuant le même raiſonnement, on trouvera que le logaritme de T, ou de o ſera $-OTPR$, & ſi le point S continue à reculer juſqu' en s le logaritme du nombre négatif Ts ſera toujours $TXqs - OTRP$ ce qui ſe réduit encore à $-PQRS$, c' eſt à dire au logaritme du nombre poſitif TS.

présent on décrit du centre C avec le rayon CA, un cercle dont les abscisses Cm soient pareillement appellées x, & les ordonnées Y, on aura $Y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ donc si l'on prend les mêmes abscisses pour le cercle, & pour l'hyperbole, on aura toujours $y = Y\sqrt{-1}$ ce que l'on sait d'ailleurs. Or il est clair que si deux courbes ont leurs ordonnées dans une raison constante, les aires seront dans la même raison, aussi bien que les secteurs qui seront formés par des lignes tirées de l'origine commune des abscisses à chaque point des courbes: puisque ces secteurs ne différent de leurs aires que par des triangles de bases égales, & qui ont leurs hauteurs dans la même raison des ordonnées.

Puisque donc dans nôtre cas les ordonnées du cercle, & de l'hyperbole sont entre elles dans la raison constante de 1 à $\sqrt{-1}$, les secteurs circulaires, & hyperboliques qui répondent aux mêmes abscisses seront aussi dans la raison de 1 à $\sqrt{-1}$.

Cela posé soit dans le cercle l'angle $PCm = \varphi$ on aura $Cm = x = r.\,cos.\,\varphi$, $mp = Y = r.\,sin\,\varphi$, & le secteur $ACp = \frac{r^2\varphi}{2}$, & par conséquent le secteur hyperbolique de l'abscisse $CM = x = r.\,cos.\,\varphi$, & de l'ordonnée $MP = y = r.\,sin.\,\varphi\sqrt{-1}$ sera $\frac{r^2\varphi\sqrt{-1}}{2}$.

Si l'on considère à présent l'hyperbole entre les assimptotes CN, CX, on sait que l'aire $ABQP$ est égale à $\frac{r^2}{2}\,l.\,\frac{CQ}{CB}$: or si des deux triangles CAB, CQP, qui sont égaux, puisqu'ils ont les bases en proportion réciproque des hauteurs, on léve la partie commune CHB, on aura $CHA = BHQP$, & si on ajoûte AHP on aura le secteur hyperbolique $CAP = BAPQ$, donc $\frac{r^2\varphi\sqrt{-1}}{2} = \frac{r^2}{2}\,l.\,\frac{CQ}{CB}$

 où

où $\varphi \surd -1 = l. \frac{CQ}{CB}$; mais $\frac{CQ}{CB} = \frac{AB}{PQ}$, & à cause des triangles semblables ACB, PQN: $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PN}$, & par conséquent $\varphi \surd -1 = l. \frac{AC}{PN}$: or $PN = MN - MP = x - y = r. (cos. \varphi - sin. \varphi \surd -1)$; donc $\frac{AC}{PN} = \frac{r}{r. (cos. \varphi - sin. \varphi \surd -1)} = \frac{1}{cos. \varphi - sin. \varphi \surd -1}$, & $\varphi \surd -1 = l. \frac{AC}{PN} = l. \frac{1}{cos. \varphi - sin. \varphi \surd -1} = -l. (cos. \varphi - sin. \varphi \surd -1$ à cause de $l. 1 = 0$; & si l'on fait l'angle φ négatif, on aura $\varphi \surd -1 = l. (cos. \varphi + sin. \varphi \surd -1$, qui est une formule asés connue aujourd'hui, mais qui n'a été jusques ici, que je sache, démontrée qu'à l'aide du calcul infinitesimal. Si $sin. \varphi$ est réel, ce qui arrivera toutes les fois que $cos. \varphi$ sera plus petit que l'unité, la quantité $cos. \varphi + sin. \varphi \surd -1$ pourra représenter une imaginaire quelconque : d'ou l'on voit comment les logaritmes imaginaires peuvent être ramenés à des Arcs de cercle; que si $cos. \varphi > 1$ alors $\surd (1 - cos. \varphi^2) = sin. \varphi$, sera une quantité imaginaire qui multipliée par $\surd -1$ devient réelle ; donc dans ce cas $cos. \varphi + sin. \varphi \surd -1$ sera une quantité réelle dont le logaritme pourra être exprimé par un Arc de cercle imaginaire; on pourra de même ramener les Arcs de cercle réels à des logaritmes de quantités imaginaires, & des Arcs de cercle imaginaires à des logaritmes de quantités réelles, ce qu'il suffira d'avoir indiqué ici, puisque cette théorie est déja asès connue, & qu'il en est amplement traité dans la Dissertation de Mr. Euler que j'ai déja citée.

Reprenons nôtre équation $\varphi \surd -1 = l.(cos. + sin. \varphi \surd -1)$, si l'on y suppose $\varphi = 2 \lambda \pi$, π dénotant la demicirconférence du cercle dont le rayon $= 1$, & λ un nombre quel-

con-

conque entier positif ou négatif: puisque *sin.* $2\lambda\pi = o$, & *cos.* $2\lambda\pi = 1$, on aura après avoir fait la substitution $2\lambda\pi\sqrt{-1} = l. + 1$, qui est la formule que Mr. Euler a trouvé par un procèdé tout à fait différent, & qui donne $l. + 1 = o, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}$ &c. De même si l'on fait $\varphi = \pi, = 3\pi, = 5\pi$, & généralement $\varphi = (2\lambda - 1)\pi$, ce qui donne *sin.* $\varphi = o$, *cos.* $\varphi = -1$, on aura $(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1} = l. - 1$; on trouveroit avec la même facilité tous les logaritmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, car si on décrit un cercle dont le rayon soit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ il est constant, qu'il y aura toujours un angle φ qui donnera *cos.* φ + *sin.* $\varphi\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}$. Or si dans la formule $\varphi\sqrt{-1} = l.$ (*cos.* φ + *sin.* $\varphi\sqrt{-1}$) on ajoûte à φ, $2\lambda\pi$, la quantité *cos.* φ + *sin.* $\varphi\sqrt{-1}$ ne changera point de valeur, comme il est évident, & conséquemment cette supposition n'altérera point la valeur de $a + b\sqrt{-1}$; & l'on aura généralement $(\varphi + 2\lambda\pi)\sqrt{-1} = l.(a + b\sqrt{-1})$.

Voila donc la Téorie de Mr. Euler apuiée sur la quadrature de l'hyperbole, dont Mr. Bernoulli se servoit pour prouver un sentiment absolument opposé, sans que sa démonstration ait pour cela rien perdu de sa force; il est donc nécessaire de comparer ensemble ces deux conclusions, & les procédés qui nous y ont conduit: ce qui sera à présent plus facile, puisqu'ils sont réduits à dépendre d'un seul, & même principe.

11. Si l'on fait attention au raisonnement de Mr. Bernoulli on s'apercevra aisément qu'il est tout fondé sur la continuité de la branche *AL* (pl. 2. fig. 4.) de l'hyperbole avec la *a l*, ces deux branches étant liées à l'infini comme il est évident; car si l'on fait $CQ = z$, $CA = r$, $QP = u$, on a $CB = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $uz = \frac{r^2}{2}$ ce qui donne $u = \frac{r^2}{2z}$, d'où l'on voit que si on fait $z = \infty$, on trouve $u = o$, & que si z décroit jusqu'a être

$= o$ on aura $u = \infty = CX$, & z dévenant à l'inſtant infiniment petit négatif ou $-o$, on trouvera $u = -\infty = CG$.

Concevons à préſent un rayon CP, qui ſuive le point P pendant que celuici par un mouvement continu décrit l'hyperbole, & que les aires correſpondantes donnent naiſſance à la logaritmique ; il eſt viſible que ce rayon partant de la poſition CQ, l'angle ACP qu'il forme avec l'axe décroitra continuellement, jusqu'à ce que CP dévenant CA l'angle ſe trouve nul, d'où il commencera à prendre des acroiſſements négatifs, mais quand le rayon CP ſera arrivé à la poſition CX, le point P qui eſt alors L paſſant immédiatement en l, comme on l'a vû, le rayon pour le ſuivre devra dévenir tout d'un coup négatif CG, & l'angle ACP ſera en même tems acru de deux angles droits : & il eſt à remarquer que c'eſt alors préciſement que commence la génération de la ſeconde branche de la logaritmique.

Cela poſé reprenons nôtre équation $\varphi\sqrt{-1} = l.\,(cos.\,\varphi \pm fin.\,\varphi\sqrt{-1})$, on a vu que ſi $\varphi = o$ on avoit $o = l. + 1$ de même ſi $\varphi = \frac{\pi}{4}$ on a $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = l.\,(cos.\frac{\pi}{4} \pm fin.\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$; mais il eſt évident, que pour ſuivre le mouvement du point P, & conſerver la continuité de l'hyperbole, il ſe doit faire un ſaut dans la continuité des angles, & le rayon qui étoit CQ dévenant alors tout d'un coup CR, l'angle de ACQ paſſera à être aCR, ce qui change la formule en $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = l.\,(-cos.\frac{\pi}{4} \mp fin.\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}$; cependant l'angle qui à préſent eſt $\pi : 4$ décroitra toujours à cauſe du mouvement du point P, & donnera généralement $\varphi\sqrt{-1} = l.\,(-cos.\,\varphi \mp fin.\,\varphi\sqrt{-1})$ juſqu'à ce que le rayon vecteur dévenant Ca on aye à cauſe de $\varphi = o, o = l. - 1$.

Il eſt cependant évident que ce ſaut de deux angles droits bleſſe la continuité des arcs de cercle : d'où on peut

infe-

inférer que cette formule ne contient pas le paſſage algébrique des logaritmes des quantités poſitives à ceux des négatives ; mais il paroit d'autre part qu'une expreſſion différentielle de l'arc φ par ſes ſinus & coſinus devroit donner indiſtinctément la rélation de cet arc φ à *coſ.* φ & *ſin.* φ, & de φ à *coſ.* $(\varphi + \pi)$ & *ſin.* $(\varphi + \pi)$.

12. Delà il ſemble qu'on pourroit croire qu'une expreſſion différentielle qui conduit à des logaritmes, appartiendroit également à des logaritmes de quantités poſitives, & à des logaritmes de quantités negatives, j'obſerve en effet que ces ſortes d'expreſſions différentielles (pour ne pas parler ici des autres qui ſont étrangéres à mon ſujet) ſont beaucoup plus étendues, que leurs expreſſions algébriques, ou, pour mieux dire, qu'une même expreſſion différentielle conduit également à différentes équations algébriques : ſi l'on cherche par exemple la ſoutengente de l'ellipſe exprimée par $y = \frac{b^2}{a^2}(a - x^2)$ on la trouve $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, où la fraction $\frac{b}{a}$ ne ſe trouve plus, & qui par conſéquent appartient à toutes les elipſes faites ſur le même diamétre a: il eſt auſſi viſible que quoique la courbe ne ſe trouve plus quand $x > a$ la ſoutengente cependant continue à être réelle, & appartient alors aux hyperboles qu'on peut décrire ſur l'axe donné ; toutes ces courbes ſont donc liées d'une maniére tranſcendante par le moyen de la formule $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, & quoiqu'on ne puiſſe pas paſſer de l'une à l'autre ſans violer la continuité algébrique, on peut faire ce paſſage ſans violer en aucune façon la continuité tranſcendante. Or l'intégration de cette équation conduit à des logaritmes, car elle donne $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{a^2 - x^2}$ & intégrant $ly = \frac{1}{2}l.(x^2 - a^2) + \frac{1}{2}l.m$ qui fait $y = \sqrt{m \times (a^2 - x^2)}$ où la lettre m doit pouvoir recevoir une valeur quelconque

que positive négative ou même imaginaire, pour conserver la même généralité à cette formule qu'on rencontre dans la différentielle $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{a^2 - x^2}$ puisqu'elle appartient également à $y = M(x^2 - a^2)$, & à $y = N(a - x^2)$.

14. Pour confirmer cette théorie je crois qu'il ne sera pas hors de propos de chercher directement l'intégrale de la formule $dx = \frac{ady}{y}$ par la méthode ordinaire du calcul intégral, qui a toujours été accusé d'être insuffisant, & même fautif dans cette occasion; je donnerai d'autant plus volontiers ici ce calcul qu'il est entiérement neuf, & qu'il peut être d'usage dans beaucoup d'autres occasions.

L'intégration de l'équation proposée fournit $x = \frac{ay^0}{0} + A$, pour déterminer A supposons que y doive être $= m$ lorsque $x = 0$, on aura $\frac{am^0}{0} + A = 0$, ou $A = -\frac{am^0}{0}$, & par conséquent $x = \frac{a(y^0 - m^0)}{0}$, qu'on divise par a, & qu'on multiplie par 0, & on aura $\frac{0x}{a} = y^0 - m^0$ & $y^0 = m^0 + \frac{0x}{a}$, & extrayant de part & d'autre la racine 0, $y = (m^0 + \frac{0x}{a})^{\frac{1}{0}}$, & tirant de même la racine x $y^{\frac{1}{x}} = (m^0 + \frac{0x}{a})^{\frac{1}{0x}}$. Si à présent on développe cette puissance, on trouvera $y^{1:x} = m^{0:0x} + \frac{1:0x}{1} \cdot m^{0.(1:0x-1)} \cdot \frac{0x}{a} + \frac{(1:0x)\times(1:0x-1)}{1.2} \cdot m^{0.(1:0x-2)} \cdot$

$0^2 x^2$

$\frac{o^2 x^2}{a^2} + \frac{(1:ox)\times(1:ox-1)\times(1:ox-2)}{1.2.3} . m^{o.(1:ox-3)} . \frac{o^3 x^3}{a^3} + \&c.$, & réduisant au même dénominateur les fractions dans les exposans, & les coéficiens

$y^{1:x} = m^{o:ox} + \frac{1}{ox} m^{o(1-ox):ox} . \frac{o x}{a} + \frac{1\times(1-ox)}{2 o^2 x^2} m^{o.(1-o2x):ox} . \frac{o^2 x^2}{a^2} + \frac{1\times(1-ox)\times(1-o2x)}{2.3.o^3 x^3} m^{o.(1-o3x):ox} . \frac{o^3 x^3}{a^3} + \&c.$, & réduisant & laissant les termes qui sont nuls $y^{1:x} = m^{1:x} + \frac{m^{1:x}}{a} + \frac{m^{1:x}}{2a^2} + \frac{m^{1:x}}{2.3a^3} + \&c.$, on aura donc

$$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3.a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c.\right)$$

si on fait cette suite

$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c. = e$, on aura

$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} e$, ce qui donne $y = m e^x$ qui est l'équation finale cherchée qui dévient $l.y = x\,l.e + l.m$.

L'arbitraire m depend donc absolument des applications particuliéres qu'on veut faire de cette formule, ainsi dans l'équation $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{x^2-a^2}{x}$ qui intégrée par le moyen des logaritmes nous à donné généralement $y^2 = m(a^2 - x^2)$: il faut faire l'indéterminée $m = \frac{a^2}{b^2}$ si l'on veut qu'elle apartienne à l'ellipse exprimée par l'équation $y = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2-x^2)}$,

&

& $m = -\frac{a^2}{b^2}$ ſi l'on veut l'appliquer à l' hyperbole de l'équation $y = \frac{a}{b} \surd (x^2 - a^2)$.

On conclut de tout ceci que la courbe exprimée par l' équation $dy = \frac{dy}{y}$ ou $x = l. my$ doit néceſſairement être compoſée d' une infinité de branches au deſſus, & au deſſous de l'axe; ainſi (fig. 6.), un logaritme AE n' appartient généralement pas plus au nombre EF qu' aux nombres EG, EH &c., & même à un imaginaire quelconque. J' obſerve cependant qu' une ſeule branche BF peut ſatiſfaire à tous les cas des nombres poſitifs, & la bf à tous les négatifs en changeant ſeulement l' origine A, ce qui étoit deja évident par la Théorie des logaritmes. Mais l'origine étant une fois fixée en A, ſi l'on veut par exemple que $l. 1 = 0$, AB étant $= 1$, c' eſt dans la ſeule branche BF qu' on doit chercher les logaritmes des autres nombres poſitifs; car ſi on vouloit encor ſe ſervir de la NG, il eſt évident qu'en prenant $MN = 1$ on auroit $- AM = l. MN = l. + 1$ ce qui eſt contre la ſuppoſition qu'on avoit fait de $l. 1 = 0$.

Toutes les branches BF CG *&c.* ne ſont donc pas liées algébriquement, & ne ſont qu' autant de cas particuliers de l' équation différentielle $x = \frac{dy}{y}$, qui ſont déterminés par l' intégration. L' expreſſion $y = e^x$ exclut auſſi la branche bf, puiſque quelque valeur qu' on donne à x, y ne peut être négatif à moins qu' on ne fît x imaginaire.

Au reſte pour faire mieux ſentir qu' on ne rencontre x imaginaire, que parcequ' on cherche y négative dans une branche ou elle ne peut pas l' être, il eſt bon de remarquer, que cela arrive même dans les courbes algébriques.

Soit

Soit par exemple la courbe repréſentée par l'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, qui a évidemment deux branches une au deſſus, & l'autre au deſſous de l'axe, à cauſe de l'ambiguité du ſigne radical, ſi dans la branche qui appartient à $+\sqrt{(a^2 - x^2)}$ je voulois trouver un y négatif, on voit qu'il faudroit que je fiſſe x imaginaire, ce qui me donneroit $y = \frac{-x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$.

Il eſt donc viſible, que l'expreſſion tranſcendante nous laiſſe à la vérité le choix d'une branche quelconque de la logaritmique, mais que la nature du problème nous ayant déterminé à une d'elles, il n'eſt plus permis de paſſer à une autre, puisqu'elles ne ſont pas liées algébriquement.

15. Tout ce que nous venons de dire ne paroit cependant encor porter aucune atteinte à la démonſtration de Mr. Bernoulli; mais par un examen réfléchi on pourra en découvrir le défaut, & quels ſont les cas où on pourroit l'adopter. Repréſentons pour cela l'équation à l'hyperbole entre ſes aſſimptotes $z = \frac{1}{u}$ qui donne $dz = -\frac{z\,du}{u}$, d'où l'on tire pour l'élement de l'aire $\frac{dz}{z}$, qui eſt auſſi comme on ſait la différence de $l.\,z$: qu'on ſuppoſe à préſent avec Mr. Bernoulli, que l'abſciſſe z décroiſſe, juſqu'à être finalement nulle, il eſt hors de doute, que l'ordonnée u, après être dévenue infinie paſſera à être infinie négative, & appartiendra à l'autre branche de l'hyperbole puiſqu'il y a un paſſage algébrique de l'infini poſitif à l'infini négatif, mais il n'en ſera pas de même de l'aire, puiſque lorſque, l'abſciſſe z dévient infiniment petite, & l'ordonnée infiniment grande, l'élement de la Courbe ſe trouvant alors

$\frac{mdz}{dz}$, qui eſt une quantité finie, & cette aire lorſque z dévient infiniment petite négative ſe trouvant de même finie, mais négative, l'aire de l'hyperbole ne peut faire ce paſſage ſans reçevoir tout à coup un décroiſſement fini; or une quantité quelconque ne peut dévenir négative de poſitive qu'elle étoit, ſans paſſer par o ou par l'infini; il eſt donc évident qu'il n'y à pas un paſſage algébrique de la branche poſitive de la logaritmique à la branche négative, puiſque la continuité des aires hyperboliques eſt interrompuë par la quantité finie $\frac{mdz}{dz} = m$.

Les deux branches de la logaritmique trouvées par Mr. Bernoulli ſont donc iſolées, & indépendantes l'une de l'autre algébriquement, quoiqu'elles ſoient liées par leur expreſſion tranſcendante; mais elles ne ſont pas moins réelles l'une que l'autre, & elles auront leurs uſages particuliers dans pluſieurs cas.

Cette théorie pouvant peut être paroître une pure ſpéculation abſolument inutile dans la pratique; je crois qu'il ne ſera pas hors de propos d'en faire ici l'application pour ſervir de dénouëment à quelques paradoxes tirés de la Mécanique (*).

16. Soit par exemple (Fig. 8.) un centre d'attraction C dont la force ſoit proportionelle, à la n^{me} puiſſance des diſtances, on aura pour l'expreſſion de la viteſſe u d'un corps A lors qu'il aura parcouru l'eſpace $AB = x$; l'équation $\frac{dx}{[a-x]^n} = u\,du$, & en intégrant $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}{n+1}$ parceque $u = o$ quand $x = o$; l'on

voit

(*) Pour connoître l'importance des remarques ſuivantes, je prie le Lecteur de relire la Propoſition 32. du premier Tôme de la Mécanique de Mr. Euler, & les autres Propoſitions de cet excellent Ouvrage qui peuvent y avoir rapport.

voit facilement, que quand le corps sera arrivé en C on aura $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ si $n+1$ est positif, & $u^2 = \infty$ si $n+1$ est négatif, mais si $n+1=0$ on aura alors recours à la méthode, que nous avons enseigné (art. 14.) & on trouvera pour l'expression générale de la vitesse, $\frac{u^2}{2} = l. \frac{a}{a-x}$ sans retourner pour cela à l'équation différentielle, comme tous les Auteurs qui ont écrit de cette matiére ont été obligés de faire jusques à présent, & il en sera de même, pour le dire en passant, d'une infinité de cas semblables qui se rencontrent très fréquemment dans la mécanique, de façon qu'on étoit toujours contraint de recommencer un calcul souvent assés long: on aura dans ce cas pour la vitesse au point C, $u^2 = l.\ \infty$

(*) Il est de plus évident par la nature du problème, que le corps devra dans tous les cas passer au delà du point C de façon, que si $Ca = CA$, & $Cb = CB$ sa vitesse en b sera la même, qu'au point B., & sera finalement nulle au point a comme elle l'étoit en A: or on voit qu'afin que la même formule, qui nous donnoit la vitesse du corps A pour la partie AC puisse s'appliquer également à la partie aC il est nécessaire qu'en faisant $a-x$ négatif on trouve l'acroissement de la vitesse négatif, & cette même vitesse toujours positive, & il est facile de s'apercevoir, que cela doit toujours arriver quand n sera un nombre impair, & entier, positif ou négatif. Mais par quelle fatalité devroit-on en excepter le cas où $n = -1$ comme on l'à prétendu

(*) Mr. Euler a prétendu à la vérité démontrer l'impossibilité de ce passage par la considération d'une elipse (art. 665.) de sa mécanique, mais le P. Boscovik a résolu cette difficulté (*art.* 82. *Dissertationis de atractione corporum ad centrum immobile tom.* 2. *part.* 3. *Academiæ Bononiensis*.)

tendu jusques à présent, parcequ' on ſuppoſoit dans ce cas, que l' expreſſion de la viteſſe au de là du point *C* étoit imaginaire, étant exprimée par le logaritme d' une quantité négative.

Pour examiner ceci, qu' on ſe rappelle, ce que nous avons vu (art. 15.) que le paſſage des logaritmes des quantités poſitives à ceux des négatives n' étoit interrompu, que parceque l' aire qui leur donnoit naiſſance recevoit tout d' un coup un acroiſſement fini. Toutes les fois donc qu' on pourra faire cette ſuppoſition ſans hurter la nature du problème, il eſt évident, que ce paſſage ne ſera point interrompu, & que les logaritmes des quantités poſitives, & négatives quoique tirés de la même formule ſeront également réels. Or s'il exiſtoit dans la nature une loi telle que nous venons de la ſuppoſer, je ne vois pas pourquoi on ne voudroit pas admetre cette eſpèce de ſaut dans l' acroiſſement de la viteſſe du corps au point *C* puiſqu' il eſt ſur que la viteſſe, qui un inſtant avant le paſſage étoit finie redévient finie un inſtant après. Le cas de $n = -1$ rentreroit alors dans la régle générale, & $l.\,(a-x)$ demeureroit réel quoique $x > a$ ce qui en effet eſt conforme aux loix de la nature quoiqu' il en ſoit on peut faire cette ſuppoſition ſans crainte d' erreur.

Pour ce qui eſt des cas, ou n eſt un nombre pair, on a vu plus haut que quoique le Corps paſſe également le point *C*, de façon, que ſa viteſſe eſt de nouveau zero au point a, cependant en faiſant $x > a$ la formule ne donne plus la vraye viteſſe du corps *A*, & cela dépend uniquement du défaut de l' expreſſion algébrique, qu' on ne peut alors aſſigner générale pour les deux cas.

Pour lui donner cependant la plus grande généralité, dont elle eſt ſuſceptible qu' on poſe $b\,(a-x)^n\,dx = u\,du$ où la lettre b ſoit une indéterminée dont la valeur depende des applications particuliéres qu' on veut faire de cette formule

mule ; on a en intégrant $b\,(\frac{a^{n+1}-[a-x]^{n+1}}{n+1.}) = \frac{u^2}{2}$ l'on voit que l'indéterminée b doit être positive toutes les fois que m est un nombre impair, & quand m est un nombre pair on fera de même b positive de A jusqu'en C, & négative de C jusqu'en a; or puisque dans le point C considéré comme e dernier point de la ligne positive AC on a $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ en le considérant comme le premier point négatif, on doit trouver pareillement $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ ce qui donne quand $x = 2\,a$, $u^2 = 0$, comme il doit être en effet.

Mais lorsque n est un nombre rompu dont le dénominateur est pair, passé le point C, il faut faire $b = -m\sqrt{-1}$ & alors la même formule pourra servir pour tous les cas.

Voila quels changemens on est obligé de faire à la formule pour que dans certaines circonstances elle ne nous rende pas imaginaires des expressions qui doivent y être réelles.

17. Il se présente une autre difficulté dans les cas où m est impair, & négatif, il est évident que le tems doit toujours croître à mesure que le corps s'éloigne du point A cependant supposons que $m = -3$ on aura $\frac{dx}{(u-x)^3} = u\,d\,u$ & intégrant $u^2 = \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{2\,a\,x - x^2}{a^2\,(a-x)^2}$, & $u = \frac{\sqrt{(2\,a\,x - x^2)}}{u\,(a-x)}$, & par conséquent $d\,t = \frac{d\,x}{u} = \frac{a\,d\,x\,(a-x)}{\sqrt{(2\,a\,x - x^2)}}$, & $t = a\sqrt{(2\,a\,x - x^2)}$ on voit que cette expression du tems est dans ce cas exprimée par des lignes proportionelles aux ordonnées d'un cercle décrit, sur le diamêtre Aa (Fig. 9.), mais elle ne peut servir que jusques en C, puisque depuis ce point les ordonnées décroissent, ce qu'il

est

eſt abſurde d'atribuer au tems. Mais ſi l'on fait reflexion que le radical $a \sqrt{(2ax - x^2)}$ a deux valeurs, on verra bien tôt que le ſigne + de ce radical doit ſervir de A en C. & le ſigne − de C en a : on aura donc généralement dans ce dernier cas $t = - a \sqrt{(2ax - x^2} + A$; pour déterminer la conſtante A qu'on réflechiſse que dans le point C les deux valeurs de t doivent être les mêmes, d'où l'on tirera $a^2 = - a^2 + A$ & $A = 2 a^2$, & le tems t ſera généralement exprimé par $2 a^2 - a \sqrt{(ax - x^2)}$; ce n'eſt donc que le quart de cercle AB qui ſervira à la conſtruction du tems, juſqu'au point C, & au de là de C on devra conſtruire un cercle du diamètre $= a$ qui touche l'autre en B, & continuer à prendre les tems ſur ce nouveau quart de cercle. Quoique ces deux cercles ne puiſſent pas être contenus dans une même equation algébrique, il eſt eſt cependant viſible que le quart de cercle AB eſt également contigu avec BD qu'il le ſeroit avec le reſte du demi cercle.

Cette conſtruction eſt facile, & exacte, & elle me paroit lever les difficultés qui dans ce cas, & dans un grand nombre d'autres ſemblables ont arrèté les géométres.

Voila je crois aſſés d'exemples de formules algébriques, qui pour être appliquées à des cas qu'elles ne peuvent exprimer, rendent imaginaires & abſurdes des expreſſions, qui doivent être réelles par la nature du problême. (*)

C'eſt

(*) Dans l'article *Gravitation* de l'Enciclopédie, & dans le troiſiéme tôme des Recherches ſur le ſiſtême du Monde (pag. 198.): il eſt parlé d'un certain paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une ſurface ſphérique quelconque. Comme l'explication que j'en ait trouvé, & que j'ai même communiqué à l'Auteur dans une lettre particulière, me paroit fondée, & que d'ailleurs elle tient immédiatement aux principes établis ci-deſſus, je crois qu'on voudra me permettre d'ajouter ici deux mots ſur ce point. Voici en quoi conſiſte le paradoxe. Soit cherchée l'attraction d'une ſurface ſpérique ſur un point placé ſur la ſurface même dans le cas des forces en raiſon inverſe des quarrés des diſtances. Si l'on commence par conſidérer le point au delà de la ſurface, & qu'ayant trouvé l'expreſſion générale de ſon attraction, on

C'eſt ſans doute un inconvénient dans l'algébre qu'on ne puiſſent pas toujours trouver des formules générales, qui puiſſe s'appliquer à toutes les circonſtances de la queſtion, mais il ſera toujours aſsès facile de reconnoître les cas qui ne peuvent être exprimés par ces équations, & on pourra les corriger par un procédé ſemblable à celui, dont je me ſuis ſervi.

18. Ces cas ſont au reſte plus fréquents dans l'algébre qu'on ne ſe l'imagine communément, & quoique le cas irréductible du troiſiéme dégré ne rende pas l'inconnue abſolument imaginaire, la mauvaiſe méthode qui y conduit ne laiſſe pas de lui en donner la forme, comme tout le monde le ſait.

On

---

faſſe enſuite évanouir la diſtance de ce point à la ſurface on aura 4π pour l'attraction. Au contraire ſi le point eſt d'abord ſuppoſé au dedans de la ſurface, ſon attraction ſe trouve toujours égale a zero, d'où elle reſte encore nulle quand le point vient toucher la ſurface même. Que ſi l'on veut d'abord regarder le point comme placé ſur la ſurface, on obtient pour lors la formule de ſon attraction $= 2\pi$. On a donc trois valeurs différentes 4π, 2π, o, qui ſemblent appartenir au même cas; ce qui doit paroitre au prémier aſpect abſurde, & contradictoire. Pour trouver le dénouement de cette difficulté, il faut rechercher avec ſoin ce que ces trois manières de conſidérer le méme cas peuvent avoir de différent entr'elles. Or je dis que cette différence dépend du point de la ſurface A qui exerce une force finie, & $= 2\pi$ le point B, lorſque on fait évanouir leur diſtance AB. Pour s'en convaincre on n'a qu'à réflechir qu'un point de ſurface eſt néceſſairement un infiniment petit des ſecond ordre; & que la fonction AB^2 de la diſtance évanouiſſante dévient auſſi infiniment petite du même ordre, d'où il s'enſuit que l'attraction du point A qui eſt proportionelle à ce point, diviſée par la fonction donnée deviendra finie; & on peut s'aſſûrer d'ailleurs que cette attraction ſera préciſement $= 2\pi$. Ceci poſé quand on fait venir le point B à la ſurface de dehors, on a l'attraction $= 4\pi$ qui eſt compoſée de l'attraction 2π du point A, & de l'autre partie 2π qui doit nécéſſairement exprimer l'attraction du reſte de la ſurface. Mais ſi l'on fait que le point vienne toucher la ſurface au dedans alors l'attraction 2π du point A devra agir en ſens contraire, & jointe avec l'autre partie 2π qui agit dans le même ſens, qu'auparavant donnera $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'attraction dans ce cas; enfin, ſi le point eſt d'abord placé ſur la ſurface en A, on exclut dans ce cas l'attraction du point de ſurface A, & on a ſeulement 2π pour l'attraction totale, tout de même comme nous le donne le calcul. Pour ſentir mieux la raiſon de ces différences, il faut faire le calcul en entier; on verra aiſément que la différentielle eſt compoſée de deux parties, dont l'une eſt toute multipliée par la diſtance du point à la ſurface, & devient par conſéquent égale

On rencontre un ſemblable inconvénient, lorſqu' on tente de conſtruire une équation au moyen d' une courbe qui n' en eſt pas capable, car quoique ſes racines ſoyent réelles, on trouve pour les déterminer des interſections imaginaires, cela arrive ſouvent quand on ſe ſert de deux courbes qui peuvent avoir des abſciſſes auxquelles répondent des appliquées imaginaires, car il eſt évident que ces courbes peuvent avoir, à une abſciſſe commune, des ordonnées égales quoique imaginaires: ce qui ne peut pas ſervir à déterminer cette abſciſſe. Si cependant on ſubſtituoit à la place de ces courbes, des autres que j' appellerai leurs contraires, qui euſſent les ordonnées réelles préciſément où les premiéres les ont imaginaires, les interſections de ces deux courbes réſoudroient ſûrement le problême; mais cet ouvrage étant actuellement ſous preſſe, je ne m' arrêterai pas à examiner cette matiére, qui me paroit cependant digne de quelque attention.

Avant

à zero, lorſque cette diſtance évanouit, l' autre partie donnant 2π pour intégrale; c' eſt le cas, où le point eſt d' abord placé ſur la ſurface; mais ſi l' on achéve l' intégration avant que de faire évanouir cette diſtance on trouve l' intégrale de la prémiere partie une expreſſion finie, qui ſe réduit au contact $= 2\pi$ ſi le corps a été ſuppoſé de dehors, & a -2π ſi on l' a ſuppoſé de dedans; d' où l' on tire pour le prémier cas $2\pi + 2\pi = 4\pi$, & $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'autre. Voila donc pourquoi la même formule ne peut pas ſervir pour tous les cas poſſibles, car dans le paſſage du point de dehors en dedans, il faudroit que l' attraction 2π devint tout d' un coup $= 0$; & puis $= -2\pi$ ce qui choque directement la loi de continuité généralement admiſe dans les formules algébriques. M. Daniel Bernoulli avoit déja ſenti l' incompatibilité de ces cas dans une même formule, comme il paroit dans l' art. 4. du chap. 11. de la Pièce ſur le flux, & réflux de la mer. Au reſte il ne doit pas paroitre étonnant qu' un point qui par rapport à une ſurface doit être régardé comme zero puiſſe dans certains cas éxercer une force finie; car il eſt clair qu' il ſuffit pour cela que la fonction qui exprime la force dévienne infinie, & infinie du même ordre que le point eſt infiniment petit. Nous avons vu comment une formule qui eſt toujours égale a zero peut réçevoir une valeur finie dans certains cas particuliers (chap. VI de ma diſſertation ſur le ſon) c' eſt la même choſe qui arrive ici. Au reſte les Géomètres ne ſont plus étrangers a ces ſortes de paradoxes, ſi on les peut nommer ainſi, (Car je n' y vois que des conſéquences toutes naturelles des ſuppoſitions qu' on a fait dans le calcul.) Mr. Clairaut à fait voir un ſemblable cas dans ſa Théorie ſur la figure de la Terre, art. 45., de la prémiere partie, & le

19 Avant cependant que de finir ces réflexions je crois qu'il ne sera pas hors de propos de donner au moyen de la formule de l' art. 10. une démonstration nouvelle & purement géométrique du fameux Théorême des imaginaires, publié premiérement par Mr. D' Alembert dans son Traité de la cause des vents, & puis manié de nouveau par Mr. Euler dans la Dissertation sur les imaginaires déja citée, d' autant plus que ces deux célèbres Géomêtres ne l' ont démontré que par les Principes du calcul différentiel. Voici l' énoncé de cette proposition, dont véritablement l' usage me paroit fort rare dans l' Analyse. Une quantité imaginaire quelconque, de la forme $c + d\sqrt{-1}$ élevée à une puissance dont l' exposant soit aussi imaginaire de la même forme, peut toujours se réduire à une imaginaire simple $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles: qu'on pose donc $(a + b\sqrt{-1}.)^{m+n\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$ il s' agit de trouver les valeurs de A & de B.

Soit pour cela $\sqrt{(a^2 + b^2)} = r$, & $\frac{a}{r} = cos.\,\varphi$, $\frac{b}{r} = fin.\,\varphi$, de plus $\sqrt{(A^2 + B^2)} = R$, & $\frac{A}{R} = cof.\,\theta$, $\frac{B}{R} = fin.$

t

Pere Boschovik dans un mémoire sur l' attraction des corps vers un centre fixe imprimé dans la troisiéme partie du second tôme des Commentaires de l' Académie de Bologne; & on voit dans la dissertation présente que le dénouement des difficultés sur le passage des logaritmes des nombres positifs à ceux des nombres negatifs dépend d' un pareil Principe.

Mr. D' Alembert apporte encore pour objection à la loi de continuité l'exemple de la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$, que Mr. Euler avoit déja proposé dans son Mémoire sur les logaritmes. Cette équation dégagée des radicaux monte au huitiéme dégré; & a généralement un diamètre, cependant dans le cas, où $b = 0$ elle ne monte plus qu' au quatriéme, & perd tout d'un coup son diamètre; mais il faut remarquer que cela n' arrive que parceque la courbe dans ce cas devient un sistême de deux, qui sont exprimées par
$y^4 - 2axy^2 + 4ax^2y + a^2x^2 - a^3x = 0$ &
$y^4 - 2axy^2 - 4ax^2y + a^2x^2 - a^3x = 0$
dont chacune en particulier est à la vérité destituée de diamètre; mais leur sistême le conserve toujours. Tous les ordres des courbes algebriques contiennent des exemples de cas semblables. NOTE DE Mr. LOUIS DE LA GRANGE.

$\sin.\ \theta$, on aura $[r\,(\cos.\ \varphi + \sin.\ \varphi \sqrt{-1})]^{m+n\sqrt{-1}} = R\,(\cos.\ \theta + \sin.\ \theta \sqrt{-1})$, & en prenant les logaritmes $(m + n\sqrt{-1})\,[l.\ r + l.\,(\cos.\ \varphi + \sin.\ \varphi \sqrt{-1})] = l.\ R + l.\,(\cos.\ \theta + \sin.\ \theta \sqrt{-1})$, & par la formule citée $(m + n\sqrt{-1})\,(l.\ r + \varphi\sqrt{-1}) = l.\ R + \theta\sqrt{-1}$, & faisant la multiplication actuelle $m\,l.\ r - n\,\varphi + (n\,l.\ r + m\,\varphi)\sqrt{-1} = l.\ R + \theta\sqrt{-1}$, & comparant les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on a $m\,l.\ r - n\,\varphi = l.\ R$, $n\,l.\ r + m\,\varphi = \theta$, équation, d'où l'on tirera facilement des valeurs réelles pour R & θ, & par conséquent pour A & B qui en dépendent : car on a $R = e^{m\,l.\ r - n\,\varphi}$, ou bien $R = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\ Arc.\ \sin.\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ & $\theta = n\ l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\ Arc.\ \sin.\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ de là $A = R\ \cos.\ \theta = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\ Arc.\ \sin.\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ $\cos.\ [n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\ Arc.\ \sin.\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}]$ & $B = R$ $\sin.\ \theta = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\ Arc.\ \sin.\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ $\sin.\ [n\ l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\ Arc.\ \sin.\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}]$.

CONSPECTUS TOTIUS OPERIS.

DE IIS, QUÆ IN SOCIETATE ACTA SUNT COMMENTARII A JOHANNE FRANCISCO CIGNA CONSCRIPTI.

DISSERTATIONES, ET OPUSCULA VARIA.

De

E R R A T A

Pour le Mémoire ſur le fluide élaſtique qui ſe développe de la Poudre à Canon.

Pag.	lin.		liſés
9	33	interdiraient	interdirait
14	4	(*r*) Com. pag.	(*r*) Com. pag. 22.
14	12	ne peut-il	ne puiſſe

In Diſſertatione de analogia magnetiſmi, & electricitatis.

47	32	eo una vitri	ex una vitri
57	*not. b*	ſecondos	ſecandos

In Diſſertatione circa putrefactionem.

75	1	quanti	quanti ad
86	5	morborum	morborum cauſſis

In faſciculo ſtirpium Sardiniae.

88	6	Allionus	Allionius
	26	integerrimus	integerrimis
89	7	Alchemilla	Alchimilla
	13	514.	524.
	16	avenis	aveniis
92	4	cordalis	cordatis
	29	norvoſis	nervoſis
96	20	refuſcente	rufeſcente
	32	Vinea	Vicia
97	5	lapaſanae	lampſanae
	29	Oenante	Oenanthe

In obſervationibus de glanduloſo Ovarii corpore.

	20	fatis	ſatis
106	10	continuatas	continuatae
108	4	ut	ac

Pour la ſuite des recherches ſur le fluide élaſtique de la Poudre.

116	20	plus bas	plus haut
129	30	dans l' eau	&c. de l' eau
135	27	(*a*)	(*z*)

Pour la Differtation fur le fon.

Page 11 *ligne* 1 Qui eft la même expreffion &c. *lifez* qui fe réduit à la même expreffion &c.

En effet ayant fuppofé dans l'art. 4. *que la force motrice dans l'echelle PHShP fût fimplement* $= \frac{QM-MR}{HK^2} \times M$, *l'on doit de même ici exprimer les forces motrices des particules par* $\frac{M d^2 y}{dt^2}$, *ou bien fuppofer* $\frac{2h}{T^2} = 1$.

Page 13 *ligne* 16 on aura fin. $efg = \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r}$, *lifez* on aura fin. $efg = - \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r}$. *Mais cette erreur n'influe en rien dans le refte du calcul, parceque les différentielles* $d^2 y$ *doivent être auffi prifes négativement.*

Page 14 *ligne* 10 *mettez l'art.* 10. *avant* Imaginons.

Page 15 *ligne* 3 *au lieu de l'*art. 10. *lifez* article 11.

Page 19 *ligne* 14 de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ *lifez* de la quantité $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; *dans la ligne fuivante* au bout d'un tems $\frac{a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{(\frac{Sa}{2Ph})}$ *lifez* au bout d'un tems $\frac{2a}{\sqrt{c}} = 2T\sqrt{(\frac{Sa}{2Ph})}$; *dans la ligne* 17 c'eft pourquoi, *lifez* mais.

Page 33 *ligne* 4 *au lieu de* (art. 20.) *pofez* (art. 21.)

Page 50 *ligne* 8 *au lieu de* Chap. III. *lifez* Chap. II.

Page 57 *ligne* 10 *au lieu de* fin. $\frac{\pi Ht}{2T}$ *lifez* cof. $\frac{\pi Ht}{2T}$.

Page 71 *ligne* 16 à l'ordonnée MN, & à l'unité, *lifez* à l'ordonnée MN, & à la quantité conftante $\frac{aH}{T}$; *dans la même page ligne* 18 aux abfciffes $am = a^{I}m^{I}$, *ajoutez* ces aires étant divifées par $\frac{aH}{T}$.

Page 102 *ligne* 9, qu'on a enſeigné article cité, *liſez* qu'on a enſeigné article 38.

Page 112 *ligne derniére* conterons, *liſez* contenterons.

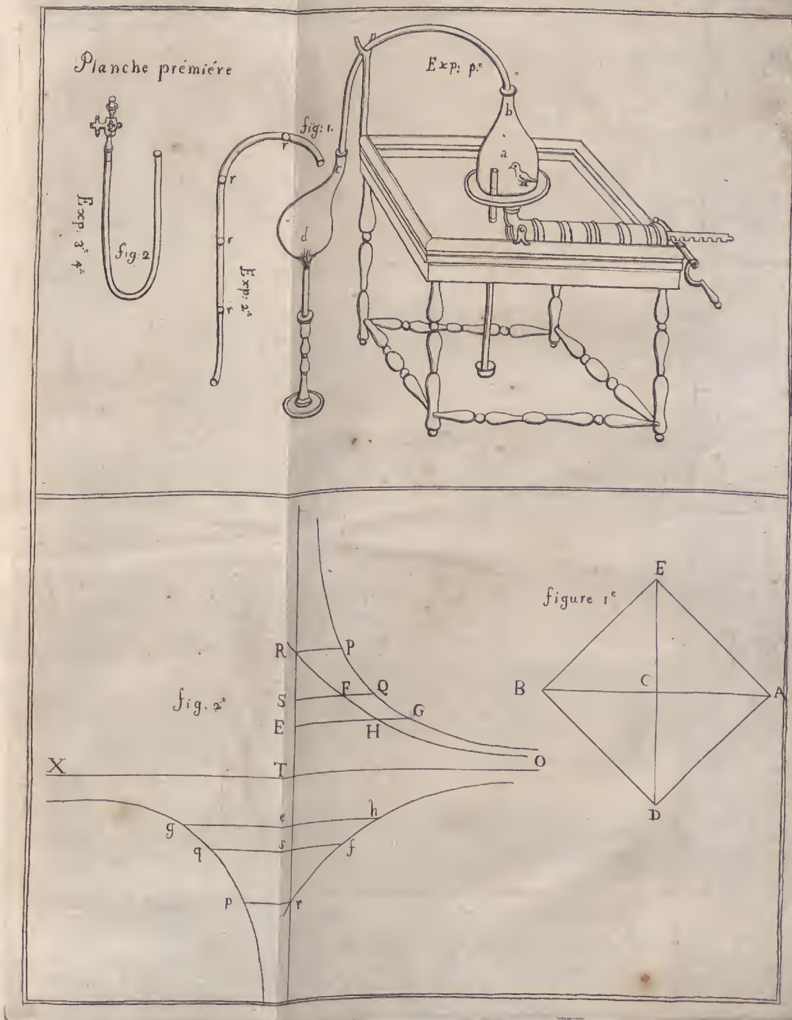


Planche premiére
Exp: pᵉ
fig: 1.
Exp: 2ᵉ
Exp: 3ᵉ 4ᵉ
fig: 2
figure 1ᵉ
fig. 2ᵉ

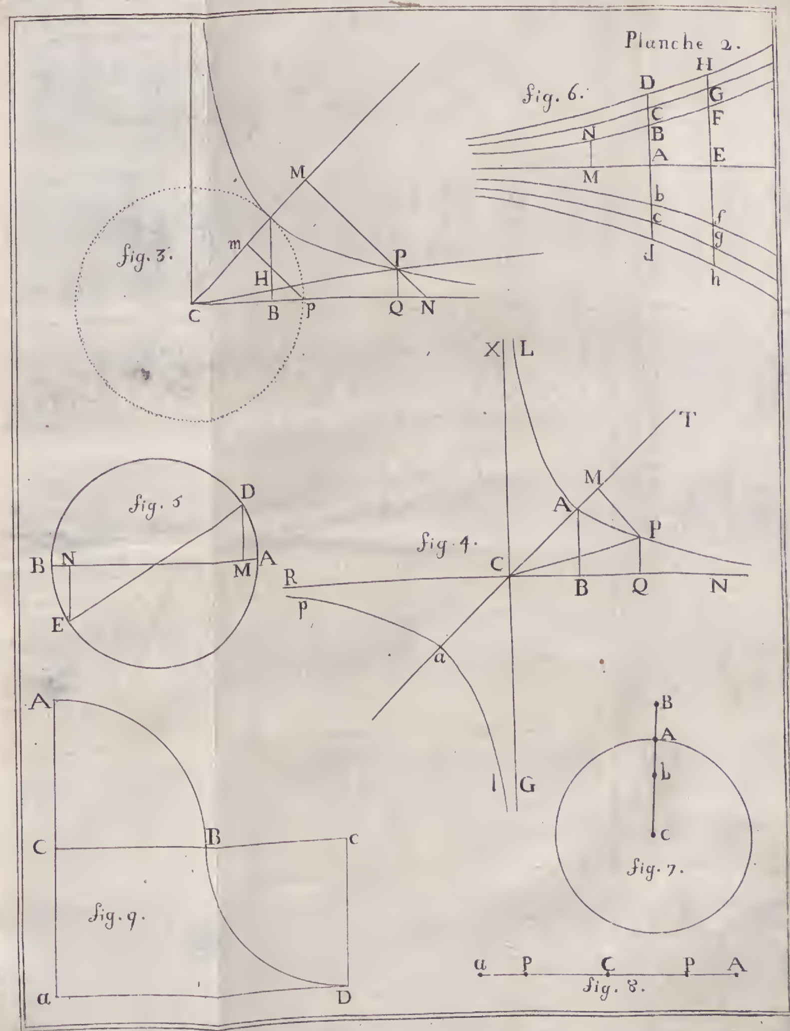
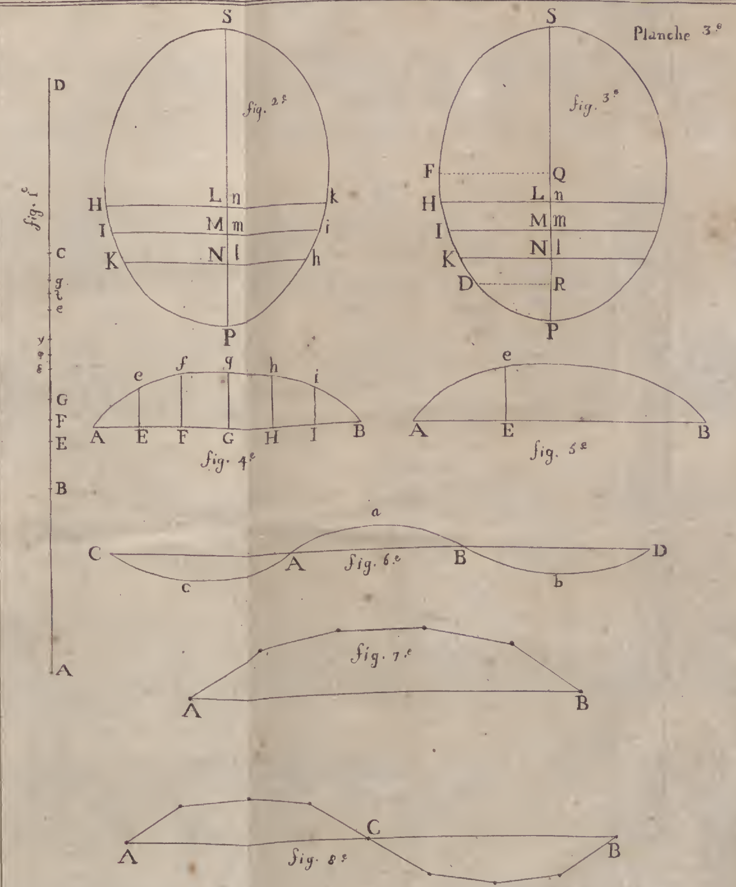
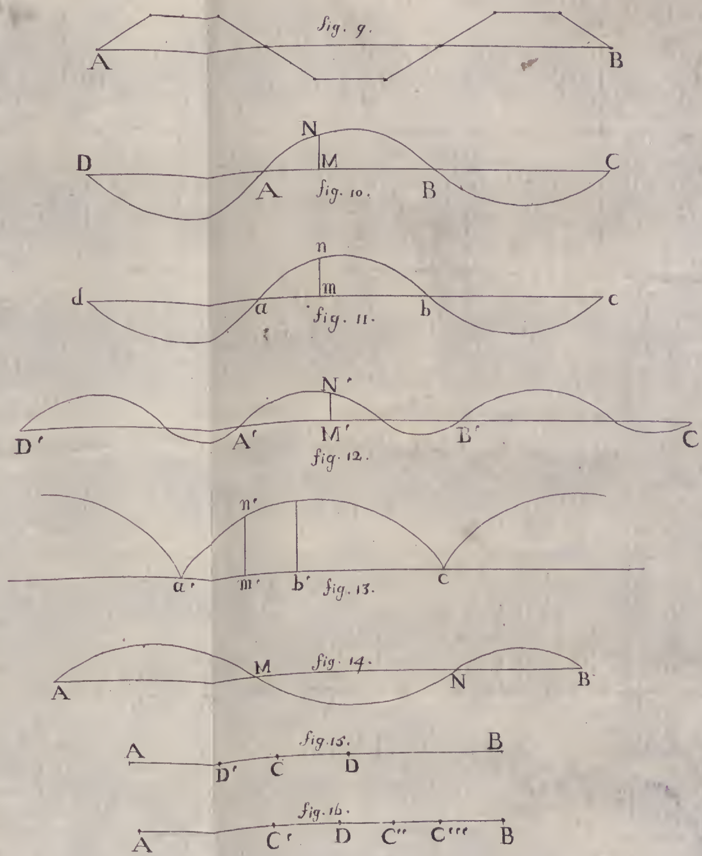

Planche 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5
fig. 6.
fig. 7.
fig. 8.
fig. 9.
a P C P A

Planche 3e



Pour la Dissertation sur le son

Planche 4e


fig. 9.
A
B
N
M
D
C
A
fig. 10.
B
n
m
d
a
fig. 11.
b
c
N'
D'
A'
M'
B'
C'
fig. 12.
n'
a'
m'
b'
fig. 13.
c
fig. 14.
M
A
N
B
fig. 15.
A
B
D'
C
D
fig. 16.
A
C'
D
C''
C'''
B

1 6 1 1